

# *L'educazione Matematica*

## **Indice**

Editoriale. Numero speciale <i>Progetto Nazionale dell'Accademia dei Lincei per "Una nuova didattica nella Scuola"</i>	3
Sebastiano Seatzu <i>Prefazione: le tematiche del programma di Matematica del Polo Sardegna.</i>	5
Giorgio Buttazzo <i>L'importanza della Matematica nell'Era Tecnologica</i>	9
Paolo Pintus <i>Il ruolo della modellistica matematica e della simulazione numerica nelle nanotecnologie</i>	27
Alfio Quarteroni <i>Modellistica Matematica per il Sistema Cardiovascolare</i>	39
Sebastiano Seatzu, Paola Zuddas <i>La Matematica nella Teoria delle Decisioni</i>	53
Notizie	71

## INFORMAZIONI PER GLI AUTORI

La rivista «L'educazione Matematica» pubblica contributi riguardanti le ricerche in didattica, storia ed epistemologia della matematica; l'innovazione delle pratiche scolastiche nei differenti livelli scolastici; testi a carattere matematico e interdisciplinare di interesse per la formazione degli insegnanti.

Gli articoli proposti per la pubblicazione nella rivista dovranno pervenire alla redazione per posta elettronica in formato doc all'indirizzo email: [mpolo@unica.it](mailto:mpolo@unica.it), riportando la dicitura: AUTORE/PROPOSTA PUBBLICAZIONE

Gli articoli dovranno indicare il titolo, nome e cognome dell'autore, qualifica, istituto di appartenenza, **indirizzo postale e di e-mail** e numero di telefono.

Inoltre, l'articolo dovrà contenere abstract e parole chiave in lingua italiana e inglese, introduzione, conclusione e bibliografia di riferimento, secondo le indicazioni fornite. Figure, grafici e tabelle dovranno essere inseriti nel testo. Sul sito <http://cli.sc.unica.it/crsem>, è possibile scaricare il file doc del format per la redazione dell'articolo.

## INFORMAZIONI SULLE ATTIVITA' DEL CRSEM

- Ciclo di seminari; Mostre; Corsi di aggiornamento; Sperimentazioni didattiche in vari ordini di scuola (per informazioni rivolgersi alla segreteria il mercoledì" dalle 10.00 alle 13.00: 0706758528; e-mail: [crsem.segreteria@gmail.com](mailto:crsem.segreteria@gmail.com))
- Redazione della presente rivista, e-mail: [mpolo@unica.it](mailto:mpolo@unica.it)
- Rally Matematico Transalpino (sezioni ARMT afferenti al CRSEM) responsabili Maria Polo, Silvana Saba e Gabriella Deiana (Cagliari), e-mail: [crsem.rmtca@gmail.com](mailto:crsem.rmtca@gmail.com); Maria Francesca Tanda (Perugia), e-mail: [mariafrancesca.tanda@tiscali.it](mailto:mariafrancesca.tanda@tiscali.it); Speranza Dettori e Salvatore Sini (Sassari), e-mail: [s\\_dettori@virgilio.it](mailto:s_dettori@virgilio.it), [salvatorecarlo.sini@gmail.com](mailto:salvatorecarlo.sini@gmail.com)
- Campionati Internazionali di Giochi Matematici (semifinali locali responsabili: Maria Polo e Annelise Murgia, email: [crsem.giochimatematici@gmail.com](mailto:crsem.giochimatematici@gmail.com))

Sito web: <http://cli.sc.unica.it/crsem>

A cura di Giuseppina Corrias

*Rivista quadrimestrale edita dal  
Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica di Cagliari  
Anno XXXVII – Serie X – Vol. 6  
n. 2 – agosto 2016*

## EDITORIALE

### **NUMERO SPECIALE - PROGETTO NAZIONALE DELL'ACCADEMIA DEI LINCEI PER "UNA NUOVA DIDATTICA NELLA SCUOLA"**

Il Progetto nazionale "I Lincei per una nuova Didattica nella Scuola: una Rete Nazionale" promosso nel 2010 dall'Accademia dei Lincei a seguito di un Protocollo d'intesa con il Ministero rinnovato nel 2013 intende:

*sostenere e favorire il miglioramento dei sistemi d'istruzione e di formazione nazionali, dando vita a una rete nazionale di Poli che imposti, nella pluralità delle iniziative, una rinnovata metodologia di insegnamento delle materie scientifiche e delle conoscenze linguistiche e concettuali, capace di stimolare l'apprendimento del metodo scientifico e lo sviluppo della creatività e che possa incidere nel tempo su tutto il territorio nazionale. Un progetto interdisciplinare che porti alla formazione di un cittadino colto, pensante, curioso e informato e ad una scuola inclusiva e motore di giustizia e promozione sociale (<http://www.linceiscuola.it/>).*

In linea con il progetto nazionale e in conformità con le finalità del progetto "Il Polo Sardegna dell'Accademia dei Lincei per una nuova Didattica della Scuola", relativamente al settore della Matematica, a partire dal 2015 la sede di Sassari e la sede di Cagliari in collaborazione, hanno organizzato conferenze, attività seminariali e di laboratorio destinate ad insegnanti di tutti i livelli scolastici<sup>1</sup>.

Negli incontri è stata affrontata l'analisi della trasposizione didattica di temi trasversali sia rispetto agli ambiti della Matematica e delle sue applicazioni, sia alle sue interazioni con l'ambito linguistico. Alcune delle Conferenze hanno proposto tematiche e argomenti anche extracurricolari nell'ottica della divulgazione scientifica e dell'innovazione didattica con le seguenti finalità:

- proporre e discutere la realizzabilità di esperienze didattiche di tipo laboratoriale, anche di carattere interdisciplinare
- favorire atteggiamenti collaborativi e di confronto intra e multi disciplinari tra insegnanti di diversa formazione e di diversi livelli scolastici

Questo secondo fascicolo del trentasettesimo anno di vita della rivista ha raccolto le note relative ad alcune delle conferenze realizzate nel Programma di Formazione del Polo della Sardegna<sup>2</sup> nell'A.S. 2015.16. Le note relative agli altri interventi saranno pubblicate nel fascicolo 3 del 2016.

*Maria Polo*

---

1 L'attività di formazione e di aggiornamento promossa dal suddetto Progetto è riconosciuta ai sensi della c.m. 376 del 23.12.95 e della direttiva n. 90/2003.

2 Si veda il dettaglio del Programma di Matematica nella pagina successiva. Le note delle conferenze e dei laboratori che non compaiono in questo numero saranno pubblicate nel numero 3-2016 di questa Rivista.



Polo Sardegna dell'Accademia Nazionale dei Lincei  
**Sede di Cagliari con la collaborazione della sede di Sassari**  
 Programma delle attività di Formazione - A.S. 2015/2016  
*Matematica*

### 1 INCONTRO (CAGLIARI)

21 Gennaio 2016 - Liceo Scientifico Euclide – Cagliari, Conferenza sul tema *Astrofisica, Astronomia, Matematica* - A. Possenti (Osservatorio – INAF Cagliari) “*La relatività in cielo*” - Laboratorio sul tema *Astronomia e Matematica. L'esperienza di Eratostene. Applicazioni didattiche*, a cura di Sebastiana Lai (ricercatore associato Inaf-Osservatorio Cagliari) e Maria Polo (Dipartimento di Matematica e Informatica – Cagliari).

### 2 INCONTRO (SASSARI E CAGLIARI)

5 Febbraio 2016 - Istituto “Giua” – Cagliari, Conferenze sul tema *Linguaggi scientifici e terminologie* - Tullio De Mauro, (accademico dei Lincei e prof. emerito della “Sapienza” di Roma, Silvana Ferreri (Univ. della Tuscia). Laboratorio trasversale sull'Educazione linguistica e matematica, a cura di tutor esperti del GISCEL e del CRSEM.

### 3 INCONTRO (CAGLIARI)

8 febbraio 2016 - Liceo Scientifico Pacinotti – Cagliari, Conferenze sul tema *La Matematica nella società dell'Informazione* - Giorgio Buttazzo (Scuola Superiore S.Anna di Pisa) “*L'importanza della Matematica nell'era tecnologica*” - Emanuele Micheli (Scuola di Robotica Educativa - Genova) - Laboratori sul tema della robotica educativa e delle ICT, tutor esperti Progetto IOTDesir e CRSEM).

### 4 INCONTRO (CAGLIARI)

29 febbraio 2016 - Liceo Scientifico Pacinotti – Cagliari *Conferenze sul tema L'importanza della Matematica nella Medicina e nelle nanotecnologie*, Alfio Quarteroni (Politecnico di Milano/EPFL di Losanna) “*Il ruolo della Matematica nella Medicina*”, Paolo Pintus (Scuola Superiore S.Anna di Pisa) “*Il ruolo della modellistica matematica e della simulazione numerica nelle nanotecnologie*”.

### 5 INCONTRO (CAGLIARI)

19 Marzo 2016 – Nuoro - Locali dell'Università, Conferenze sul tema *La Matematica nella teoria delle decisioni e nel problem solving*, Paola Zuddas (Università di Cagliari) “*Il ruolo della programmazione matematica nella teoria delle decisioni*”; Pietro Di Martino (Università di Pisa) “*Argomentazione e problem solving: competenze chiave nell'educazione matematica e non solo*”, Laboratori sulla didattica della Matematica, a cura di Pietro Di Martino, tutor esperti del CRSEM e di Dottorandi e Ricercatori del Dipartimento di Matematica e Informatica.

**PREFAZIONE**  
**LE TEMATICHE DEL PROGRAMMA DI MATEMATICA**  
**DEL POLO SARDEGNA DELL'ACCADEMIA DEI LINCEI**

Sebastiano Seatzu<sup>1</sup>

Le note di questo fascicolo sono rappresentative delle tematiche trattate negli incontri<sup>2</sup> del Programma<sup>3</sup> di Matematica del Polo Sardegna del Progetto dell'Accademia dei Lincei nell'anno scolastico 2015.16.

Tale attività, come tutte le altre organizzate dai responsabili scientifici delle sezioni di Scienze e Italiano delle due sedi di Sassari e Cagliari, nelle quali si compone il Polo Sardegna dell'Accademia Nazionale dei Lincei, hanno potuto concretizzarsi grazie al supporto finanziario concesso dalla "Fondazione Banco di Sardegna" al progetto **"Il Polo Sardegna dell'Accademia dei Lincei per "Una nuova didattica nella Scuola"**

Il Polo Sardegna è uno dei 19 Poli dell'Accademia Nazionale dei Lincei, presenti in tutte le regioni italiane e che diffondono le loro attività in almeno 25 città. Gli interventi svolti dai Poli, sulla base di quanto previsto dal Protocollo d'intesa tra il MIUR e l'Accademia dei Lincei (siglato il 4 novembre 2010, successivamente rinnovato e tuttora vigente), hanno suscitato vivo interesse nel mondo della scuola, come testimoniato dal gran numero degli insegnanti che vi hanno preso (Per ulteriori informazioni: [www.lincedieistruzione.it/](http://www.lincedieistruzione.it/)).

Il Polo Sardegna, sorto per iniziativa del Prof. Pietro Cappuccinelli, unico accademico dei Lincei della Sardegna, in conformità con quanto previsto dal programma nazionale, ha avviato varie iniziative nel campo dell'aggiornamento disciplinare e metodologico dei docenti delle scuole di ogni ordine e grado.

Alla loro realizzazione contribuiscono le Università degli Studi di Sassari e Cagliari, l'Ufficio Scolastico Regionale (**USR**), il Centro Pilota **SID** (Scientiam Inquirendo Discere) della Sardegna, facente parte dell'Associazione Nazionale degli Insegnanti di Scienze Naturali (**ANISN**), il **CRSEM** (Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica) di Cagliari e la sezione Sardegna del **GISCCEL** (Gruppi di Intervento e Studio nel Campo dell'Educazione Linguistica); gli ultimi due operanti da decenni in Sardegna nei rispettivi campi nell'educazione matematica e linguistica.

---

<sup>1</sup> Coordinatore della Sede di Cagliari del Polo Sardegna dell'Accademia nazionale dei Lincei. Dipartimento di Matematica e Informatica, viale Merello 92 (seatzu@unica.it; sebastiano.seatzu@gmail.com).

<sup>2</sup> Gli eventi sono stati organizzati dalla Prof.ssa Maria Polo, responsabile scientifica per la Matematica della Sede di Cagliari con la collaborazione del Dott. Carlo Pensavalle, responsabile scientifico della sede di Sassari del Polo Sardegna dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

<sup>3</sup> Si veda il dettaglio del Programma a pag. 4 di questo fascicolo.

I soci del CRSEM sono stati determinanti nella organizzazione e svolgimento delle attività di laboratorio per la “Matematica”, organizzate dalla sede di Cagliari del Polo Sardegna.

Analogo ruolo è stato svolto dai soci del GISCEL per il settore “Italiano”. Molto importanti sono altresì risultate le attività di formazione e di laboratorio organizzate dal Centro Pilota SID della Sardegna per insegnanti della scuola dell’obbligo, con il supporto finanziario del Polo Sardegna.

### **Commenti alle note.**

Ciascuna nota ripropone il tema trattato negli incontri del Programma<sup>4</sup> di Matematica del Progetto dell’Accademia dei Lincei nell’anno scolastico 2015.16. Il Programma della sede di Cagliari si propone di contribuire alla formazione e all’aggiornamento degli insegnanti di Matematica, soprattutto del triennio conclusivo delle scuole secondarie di secondo livello, anche sul ruolo propulsivo della matematica in settori attuali e importanti per lo sviluppo della società.

La scelta delle tematiche trattate nelle conferenze risponde, conseguentemente, all’obiettivo di mettere in luce il ruolo essenziale della Matematica in diversi settori, ciascuno rilevante per il progresso scientifico e tecnologico, come meglio evidenziato nel seguito.

**1. La prima tematica** oggetto della conferenza tenuta dal Prof. Buttazzo, riguarda il ruolo della Matematica nell’Era Tecnologica, quale è quella contemporanea. In essa sono presenti vari riferimenti applicativi, il cui progresso è fortemente dipendente dalla modellistica matematica, dagli strumenti di analisi propri della Matematica e dalle sue metodologie di calcolo. Personalmente trovo particolarmente efficaci, rispetto alle finalità dell’evento, i riferimenti alla trigonometria nella robotica, alla teoria dei grafi nell’Informatica e alla matematica di base per le reti neurali, che rappresentano gli elementi base per lo sviluppo dell’intelligenza artificiale. Ciascuno di essi fornisce infatti argomenti che potrebbero essere efficacemente utilizzati dagli insegnanti delle scuole superiori per stimolare l’interesse dei loro studenti allo studio della trigonometria, dell’algebra lineare, dell’analisi matematica e delle tecniche di calcolo.

Anche dal punto di vista delle applicazioni, i riferimenti sono molto appropriati, in quanto riguardano settori tecnologicamente strategici per lo sviluppo dei paesi che, come il nostro, dipendono fortemente dall’industria manifatturiera.

(Per ulteriori informazioni: <http://retis.sssup.it/?q=taxonomy/term/6>).

**2.** La nota del Dott. Pintus riguarda le nanotecnologie, settore che apre nuove frontiere alla ricerca scientifica e tecnologica, come dimostrato dalla formidabile competizione industriale esistente nel settore in ogni parte del mondo. Competizione che si manifesta, in particolare, mediante la ricerca di giovani talenti in ogni parte

---

4 Nel fascicolo 3, del numero di Dicembre 2016 di questa Rivista saranno pubblicate le note delle altre conferenze e laboratori realizzati negli incontri del Programma di Matematica 2015.16.

del pianeta. Le caratteristiche richieste riguardano principalmente la preparazione scientifica di base, con particolare riguardo a quella fisico-matematica, e la naturale predisposizione al lavoro interdisciplinare. Si tratta di un settore che offre molte opportunità occupazionali in molte parti del mondo, inclusi tutti i paesi dell'Europa. Per questo motivo ritengo che gli insegnanti vorranno considerare la nota del Prof. Pintus come un contributo da utilizzare per accrescere l'interesse dei loro studenti per la cultura scientifica in generale e per quella matematica in particolare.

(Per ulteriori informazioni: <http://www.santannapisa.it/it/personale/paolo-pintus>)

**3.** L'intervento del Prof. Quarteroni riguarda un settore della Medicina nel quale, grazie al contributo scientifico del suo gruppo, la modellistica matematica e relative tecniche di calcolo tende a svolgere un ruolo predittivo molto importante. Pur avendo letto alcuni articoli al riguardo e assistito ad altre conferenze sulla stessa tematica, sono rimasto molto impressionato dai risultati illustrati dal Prof. Quarteroni nella sua conferenza. Le competenze matematiche richieste per condurre tali tipi di ricerche sono molte e sofisticate. La conferenza evidenzia molto bene, in particolare, che la Matematica è destinata a svolgere un ruolo crescente nella Medicina. Questo implica che la preparazione fisico-matematica degli studenti di Medicina è destinata a crescere in modo molto significativo, essendo evidente l'interesse sociale alla formazione di nuove generazioni di medici in grado di avvantaggiarsi, nella loro attività professionale, dei nuovi strumenti di indagine e predizione che i continui progressi scientifici mettono loro a disposizione. Immagino pertanto che vari insegnanti trarranno spunto da questa nota per far presente ai loro studenti che una buona preparazione matematica di base è, attualmente, anche più importante che nel passato per chi pensa alla Medicina come proprio percorso universitario.

(Per ulteriori informazioni: <http://cmcs.epfl.ch/people/quarteroni>).

**4.** La quarta nota, riguardante la conferenza tenuta a Nuoro dalla Prof.ssa Zuddas, tratta alcune problematiche sul "Problem Solving"; settore nel quale, come noto, gli studenti italiani, nei vari test internazionali, hanno ottenuto valutazioni comparativamente negative rispetto a quelle degli studenti di molti altri paesi, in particolare europei.

A tal fine, vengono inizialmente presentate alcune situazioni problematiche, provenienti da diversi campi applicativi, ciascuna delle quali ammette una molteplicità di soluzioni tra le quali, nella generalità dei casi di interesse applicativo, una sola è "ottimale", relativamente a un obiettivo prefissato, nel rispetto dei vincoli propri del sistema. Seguono quindi vari riferimenti alle tecniche matematiche che consentono di identificare e calcolare la soluzione "ottimale" come pure, nei casi in cui essa non esiste, di identificare e calcolarne una subottimale.

L'obiettivo è di far capire le ragioni per le quali, in molteplici campi applicativi, la Programmazione Matematica rappresenta lo strumento base nella Teoria delle Decisioni.

Questo dipende dall'esistenza di tecniche matematiche nelle quali convivono un

aspetto modellistico e uno numerico. Il primo consente di associare al problema applicativo un modello matematico che lo caratterizza e il secondo di ottenere la soluzione desiderata, mediante l'applicazione di specifiche tecniche di calcolo.

(Per ulteriori informazioni: <http://people.unica.it/paolazuddas/>).

Anticipando una parte del Programma di attività di formazione per la Matematica del Polo Sardegna del 2016.17 riportiamo le conferenze<sup>5</sup> previste tra novembre e dicembre 2016.

### 1. INCONTRO (Cagliari)

**24 Novembre 2016 - ore 16.00-19.00 – Dipartimento di Matematica e Informatica**  
 Conferenze sul tema: *Matematica applicata e Bioinformatica*.

Relatore **Nicola Bellomo** (Matematico Applicato, Politecnico di Torino e Direttore della SIMAI). Titolo della conferenza “*Sistemi complessi: Le Scienze Matematiche nella Ricerca, nella Formazione e nella Società*”.

Relatore **Alberto Policriti** (Bioinformatico, Università di Udine). Titolo della conferenza “*Bioinformatica e sequenziamento dei genomi*”.

### 2. INCONTRO (Sassari e Cagliari)

**1 Dicembre 2016 – Sassari – ore 16.00-19.00 – 2 Dicembre 2016 – Cagliari – ore 15.30-18.30 – Dipartimento di Matematica e informatica- Palazzo delle Scienze – Conferenze trasversali sul tema *Lingua, varietà dei testi e CLIL* (Content and Language Integrated Learning).**

Relatore **Francesco Sabatini** (Presidente emerito dell'Accademia della Crusca.), conferenza dal titolo: “*La lingua e la varietà dei testi: un percorso per le discipline scientifiche*”. Relatore **Franco Favilli** (Docente di didattica della Matematica, Università di Pisa), conferenza dal titolo: “*Matematica e CLIL: non solo lingua straniera...*”.

### 3. INCONTRO (Cagliari)

**20 dicembre 2016 - ore 16.00-19.00 – Aula Magna Facoltà Magna Ingegneria e Architettura. Via Marengo, Cagliari - Conferenze e laboratorio sul tema *Matematica e sistemi complessi*.**

Relatore **Michele Benzi** (Analista Numerico, Emory University, Atlanta). Titolo della conferenza “*Matematica per lo studio dei sistemi complessi: i social networks*”.

**Caterina Fenu** (Post-Doc di Analisi numerica – Aacken - Germania). Laboratorio sullo stesso tema.

---

5 Il programma definitivo sarà pubblicato nel fascicolo 3-2016; le note relative a queste conferenze saranno pubblicate nei fascicoli del 2017 di questa Rivista.

## L'IMPORTANZA DELLA MATEMATICA NELL'ERA TECNOLOGICA

Giorgio Buttazzo<sup>1</sup>

### Sommario

La matematica ha svolto sempre un ruolo fondamentale in tutti i campi dell'ingegneria, ma è diventata ancora più cruciale in quei settori relativamente più innovativi, come l'informatica, la robotica, la grafica computerizzata, la visione artificiale e l'intelligenza artificiale, dove la computazione è spesso basata su modelli matematici della realtà.

Nonostante il ruolo essenziale che la matematica svolge nello sviluppo tecnologico della società moderna, essa viene spesso insegnata trascurando ogni collegamento con le applicazioni reali che essa consente di realizzare. La conseguenza è che per la maggior parte degli studenti la matematica può risultare noiosa, poiché considerata inutile e fine a se stessa, con il rischio elevato che molti risultati importanti siano imparati e memoria, per essere presto dimenticati. Per evitare che ciò accada, è importante fornire agli studenti degli esempi concreti che illustrino le potenzialità e le applicazioni delle varie tecniche matematiche introdotte nel programma di studio.

Questo articolo illustra alcuni esempi applicativi dei metodi matematici utilizzati in diversi settori dell'ingegneria, allo scopo di fornire delle motivazioni che possano entusiasmare lo studente ad affrontare lo studio della matematica in modo più costruttivo e consapevole.

### Introduzione

E' utile osservare che la scienza e l'ingegneria si pongono obiettivi diversi nell'affrontare lo studio del mondo che ci circonda. Infatti, mentre la scienza è interessata a comprendere il funzionamento di ciò che già esiste in natura, l'ingegneria è interessata a risolvere problemi pratici, inventando qualcosa di nuovo che non esiste in natura. In altre parole, la scienza è interessata al mondo così com'è, mentre l'ingegneria si pone lo scopo di cambiare il mondo, attraverso la ricerca e lo sviluppo di nuove tecnologie.

Quando si parla di ricerca scientifica, a volte si tende a distinguere tra *ricerca di base* e *ricerca applicata*, indicando come ricerca di base uno studio finalizzato ad avanzare la conoscenza, indipendentemente da benefici immediati, e come ricerca applicata un processo finalizzato ad ottenere risultati pratici a breve ter-

---

<sup>1</sup> Laboratorio di Sistemi in Tempo Reale - Scuola Superiore Sant'Anna, Pisa - Email: g.buttazzo@sssup.it

mine utili alla società. Questa distinzione, tuttavia, crea una grossa confusione sul significato di ricerca applicata, che spesso viene confusa con lo sviluppo di tecniche per realizzare prodotti industriali. E' bene invece chiarire che

*uno studio finalizzato a produrre prodotti specifici,  
senza alcun obiettivo di lungo termine o implicazioni generali,  
è semplicemente una ricerca scadente.*

La ricerca di buona qualità è sempre caratterizzata da uno studio scientifico rigoroso finalizzato ad *avanzare la conoscenza* e produrre nuovi risultati che *prima o poi* saranno utili alla società. Secondo questa visione, una ricerca è applicata non se si concentra su un prodotto, ma se produce *risultati generali* che qualcun altro è capace di sfruttare per costruire qualcosa di utile. Di conseguenza,

*La convinzione purtroppo diffusa (soprattutto tra i politici)  
secondo cui lo studio teorico non sia utile alla società  
è assolutamente sbagliata!*

Un buon metro per valutare l'impatto sociale di un risultato è quello di misurare il numero di persone che ne beneficiano, dove il beneficio può essere misurato, ad esempio, in termini di tempo o costo risparmiato per persona. E' quindi evidente che maggiore è la generalità di un risultato, maggiore sarà il suo impatto sociale. A prova di ciò, basti osservare che tutta la tecnologia moderna esiste grazie ai risultati raggiunti dalla scienza fondamentale. Navi, treni, automobili, aerei, e missioni spaziali sono possibili primariamente grazie alla meccanica classica di Newton e Galileo; motori elettrici, trasmissioni radio e televisione esistono grazie alla teoria sull'elettromagnetismo di Faraday e Maxwell; l'energia atomica e navigatori satellitari si basano sulla teoria della relatività di Einstein; e l'elettronica, i computer e gli smartphone sono stati possibili grazie alla meccanica quantistica di Schrödinger e Heisenberg.

E' interessante osservare che nessuno dei padri di queste teorie avrebbe potuto immaginare lo straordinario impatto che esse avrebbero avuto nella società futura. Essi non erano motivati dall'applicazione, ma dalla curiosità!

Nel campo ingegneristico, la generalità di un risultato può essere ottenuta grazie all'uso di modelli matematici che astraggono (idealizzano) il comportamento di un sistema fisico, descrivendolo in termini di variabili ed equazioni, che possono quindi essere analizzate e risolte per trovare la soluzione al problema. La generalità è data dal fatto che, essendo il modello descritto per mezzo di variabili, queste possono essere modificate per adattare il problema a diversi casi specifici. Tale processo di astrazione è schematicamente illustrato in Figura 1.

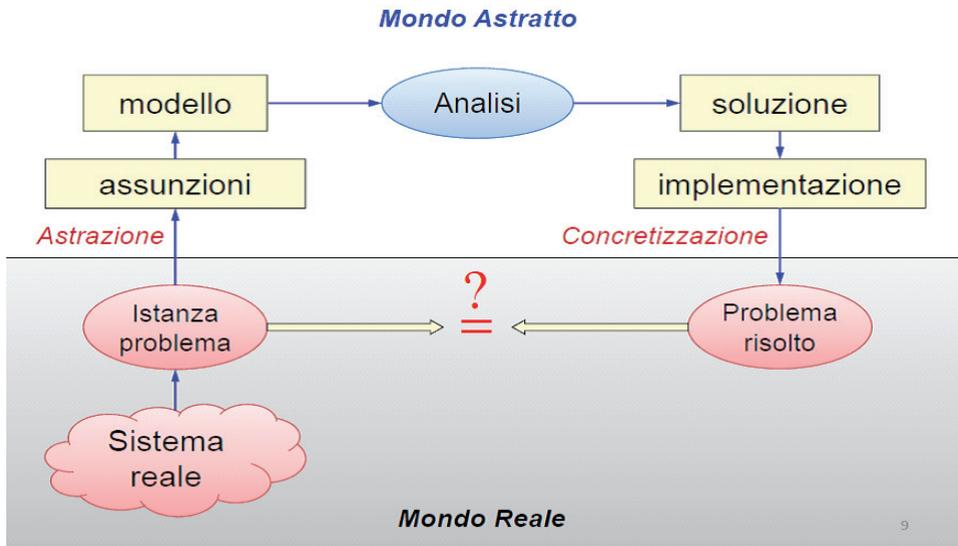


Figura 1: Il processo di astrazione.

Come si può notare, se da un lato il modello consente una generalizzazione dei risultati, dall'altro richiede inevitabilmente una semplificazione che allontana il sistema dalla realtà fisica. Tale semplificazione, tuttavia, si rende necessaria al fine di contenere la complessità del modello e ottenere una formulazione *trattabile* del problema, ossia risolvibile in tempi relativamente brevi. Dato che il problema risolto non si riferisce esattamente al sistema reale, ma al sistema astratto, una fase importante di tale processo è la verifica sperimentale della soluzione sul sistema fisico, necessaria per valutare gli errori introdotti dalla soluzione approssimata.

La conoscenza di metodi matematici è fondamentale sia nella fase di modellazione che nella fase di analisi, al fine di trovare una soluzione al problema.

Nell'Ingegneria Informatica i metodi matematici sono utilizzati per trattare numerosi problemi legati alla progettazione di architetture di calcolo, algoritmi e applicazioni informatiche. Tra le metodologie più utilizzate ricordiamo l'Algebra di Boole, le equazioni differenziali, le trasformate di Laplace e Fourier, la trigonometria, la cinematica, e la teoria dei grafi. Di seguito sono riportati alcuni esempi che illustrano l'uso di queste metodologie su svariati tipi di problemi.

## 1. Algebra di Boole

L'Algebra di Boole è alla base del funzionamento dei calcolatori e permette di descrivere le relazioni logiche tra variabili binarie che possono assumere solo due valori: VERO (1) o FALSO (0). Essa è utilizzata per progettare i circuiti digitali e le porte logiche con cui sono costruiti i microprocessori che si usano nei calcolatori elettronici e nei cellulari. La Figura 2 riporta alcuni esempi di operazioni logiche che si possono definire sui bit.

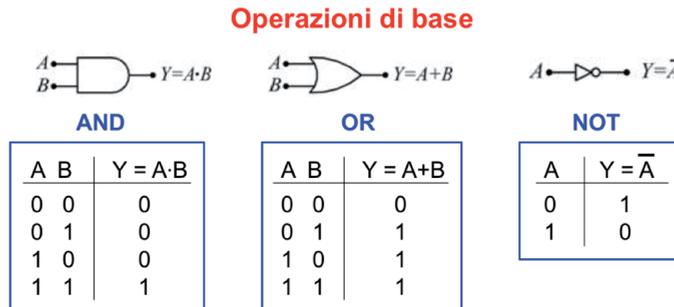


Figura 2: Esempi di operazioni logiche sui bit.

L'algebra di Boole può essere anche utilizzata per ragionare su espressioni logiche. Ad esempio, l'implicazione è un'operazione logica tra due proposizioni A e B, indicata come  $A \Rightarrow B$  e caratterizzata dalla seguente tabella di verità:

### IMPLICAZIONE

A	B	Y = $A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In altre parole, l'operazione  $A \Rightarrow B$  richiede che la prima proposizione sia vera per stabilire la verità o falsità dell'implicazione. Una proposizione antecedente falsa non può implicare alcunché. Applicando le regole appena viste dell'algebra di Boole, si può facilmente dimostrare che, se A e B sono due proposizioni, allora

$$A \Rightarrow B \text{ è equivalente a } \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

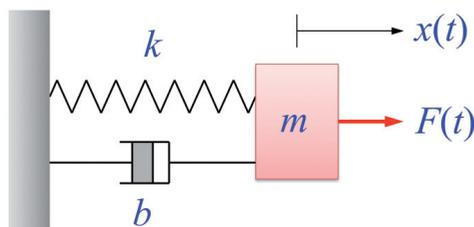
che è la proprietà su cui si fondano tutte le dimostrazioni per assurdo. Secon-

do questa metodologia dimostrativa, si assume l'ipotesi A vera, si nega la tesi B e si cerca di dimostrare che l'ipotesi è falsa, ottenendo quindi una contraddizione, visto che si era partiti assumendo l'ipotesi A vera.

## 2. Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni che legano una funzione incognita  $x(t)$  alle sue derivate. L'importanza delle equazioni differenziali nell'ingegneria deriva dal fatto che esse permettono di descrivere il comportamento dinamico di sistemi fisici.

Si consideri, ad esempio, un corpo di massa  $m$  collegato ad una molla con costante elastica  $k$  e ad uno smorzatore con coefficiente di smorzamento  $b$ , come illustra la Figura 3. Detta  $x(t)$  la posizione della massa al tempo  $t$ , la forza  $F(t)$  a cui è soggetto il corpo in ogni istante può essere espressa come la somma di tre componenti, una componente inerziale proporzionale alla massa  $m$  e all'accelerazione del corpo (derivata seconda della posizione), una componente viscosa proporzionale a  $b$  e alla velocità (derivata prima della posizione) e una componente elastica proporzionale a  $k$  e alla posizione  $x(t)$ .



$$F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k x \quad (1)$$

Figura 3: Sistema massa-molla-smorzatore.

Nota la posizione iniziale del corpo all'istante  $t = t_0$ , risolvendo tale equazione è possibile descrivere la posizione del corpo in qualsiasi istante  $t$  e per qualsiasi valore dei parametri  $(m, k, b)$ .

L'unico problema delle equazioni differenziali è che sono difficili da risolvere. Fortunatamente, nel 1812, Pierre-Simon de Laplace ideò un metodo per semplificarne la soluzione, oggi noto come *Trasformata di Laplace*.

### 3. Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace consente di risolvere un'equazione differenziale in forma algebrica trasformando una funzione di una variabile reale  $t$  (tempo) in una funzione di variabile complessa  $s$ .

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

Dunque, anziché risolvere un'equazione differenziale nel dominio del tempo, il metodo di Laplace consiste nel trasformare l'equazione differenziale in una equazione algebrica, risolverla con metodi classici, e quindi riconvertirla (applicando l'anti-trasformata di Laplace) nel dominio del tempo. Tale procedimento risolutivo è schematicamente illustrato in Figura 4.

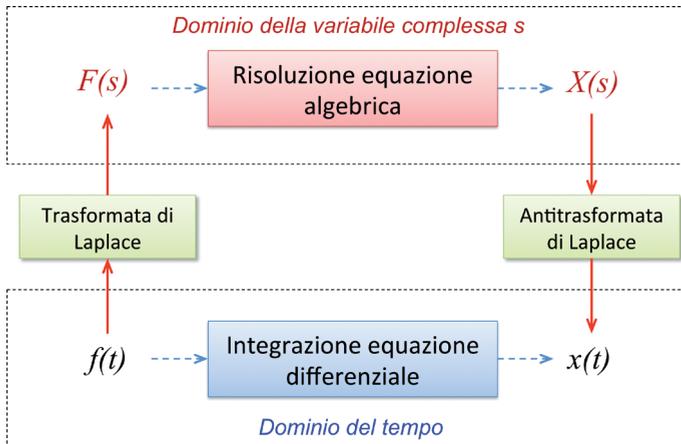


Figura 4: Schema risolutivo di equazioni differenziali mediante il metodo di Laplace.

E' interessante notare che, detta  $X(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $x(t)$ , la trasformata della derivata di  $x(t)$  è  $sX(s)$ , mentre la trasformata dell'integrale di  $x(t)$  è  $X(s)/s$ . Dunque la trasformata di Laplace dell'Equazione (1) risulta:

$$F(s) = ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) \quad (3)$$

Se  $F(t)$  rappresenta una funzione d'ingresso nota, mentre  $x(t)$  rappresenta la funzione di uscita che vogliamo calcolare, il rapporto tra le trasformate di uscita e d'ingresso definisce quella che si chiama *Funzione di trasferimento* del sistema, indicata con  $G(s)$ , e schematicamente illustrata in Figura 5.

$$F(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X(s)$$

$$F(s) = (ms^2 + bs + k)X(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Figura 5: Esempio di funzione di trasferimento per il sistema massa-molla-smorzatore illustrato in Figura 3.

Un'altra grande invenzione matematica, al pari della trasformata di Laplace, è la Trasformata di Fourier.

#### 4. Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier consente di esprimere una qualsiasi forma d'onda come una somma di sinusoidi di ampiezza e frequenza opportune:

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(kax) + b_k \sin(kax)] \quad (4)$$

La Figura 6 illustra il concetto di scomposizione che è alla base della Trasformata di Fourier.

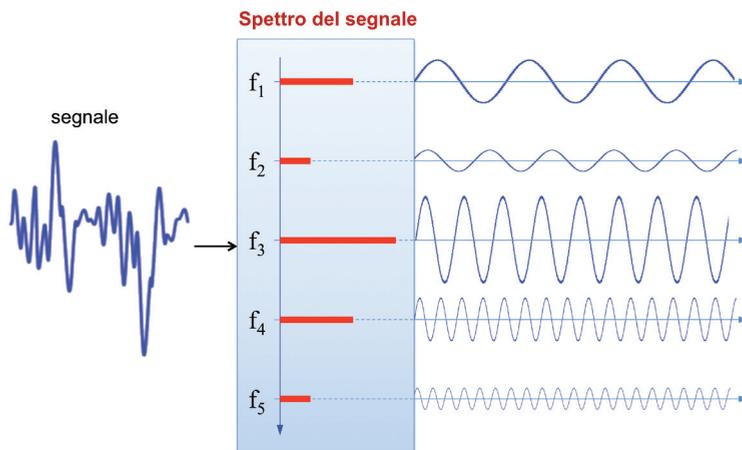


Figura 6: Ogni segnale temporale può essere scomposto e ricostruito come somma di segnali sinusoidali aventi ampiezza e frequenza opportune.

E' interessante osservare che il sistema uditivo umano sfrutta la scomposizione frequen-

ziale attraverso la coclea, un apparato osseo dell'orecchio interno a forma di spirale che entra in risonanza in posizioni diverse a seconda della frequenza dell'onda acustica. Come illustrato in Figura 7, un fascio di nervi attaccati lungo tale osso (*nervo cocleare*) preleva le diverse vibrazioni, effettuando di fatto una conversione in frequenza dell'onda acustica.

Per meglio comprendere il concetto di composizione frequenziale, la Figura 8 mostra un segnale temporale (in rosso) confrontato con diverse approssimazioni (in blu) ottenute sommando un numero  $N$  crescente di funzioni sinusoidali. Si noti come già con 8 funzioni a frequenza diversa, il segnale possa essere approssimato con un errore molto ridotto.

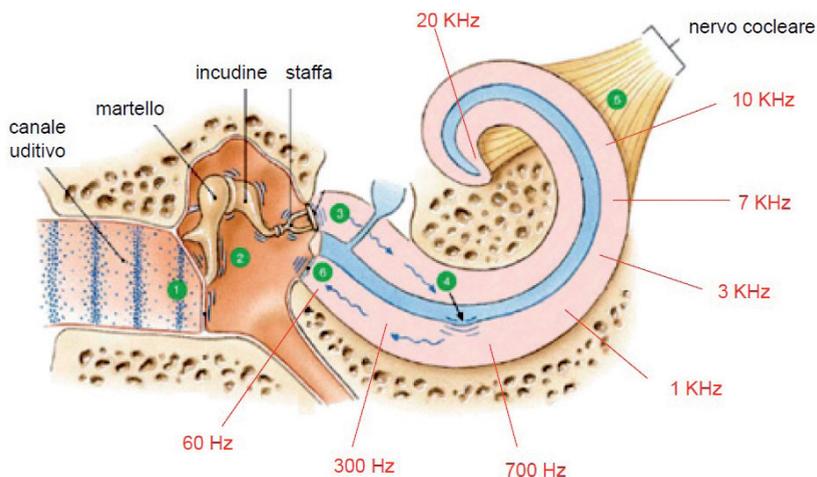


Figura 7: Schema di funzionamento del sistema uditivo umano.

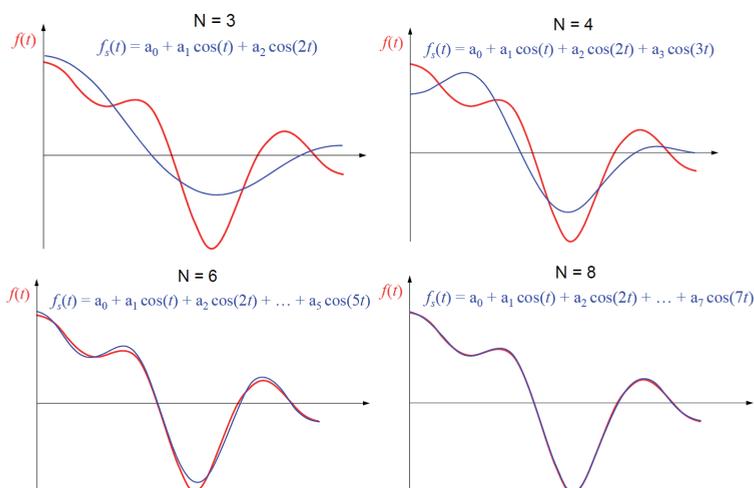


Figura 8: Un segnale temporale (in rosso) confrontato con diverse approssimazioni (in blu) ottenute sommando un numero  $N$  crescente di funzioni sinusoidali.

Il risultato straordinario del metodo Fourier è che esso è in grado di rappresentare anche funzioni discontinue. Un esempio di funzione discontinua approssimata è illustrato in Figura 9.

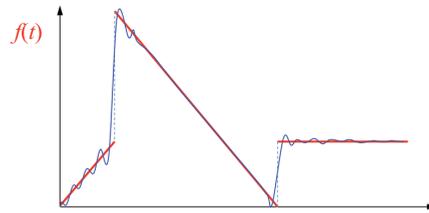


Figura 9: Un esempio di approssimazione di una funzione discontinua.

Questo risultato creò grande scompiglio tra i matematici dell'epoca, tra cui Lagrange, Laplace, Poisson, ed Eulero, i quali non credevano che ciò fosse possibile. L'espressione di segnali discontinui come somma di funzioni sinusoidali, tuttavia, richiede un gran numero di termini per ottenere un'approssimazione accurata. La Figura 10 illustra alcuni esempi di come una forma d'onda rettangolare possa essere approssimata utilizzando un numero crescente di segnali sinusoidali; a destra di ogni forma d'onda approssimata è mostrato il corrispondente spettro, ossia l'ampiezza delle componenti sinusoidali che compongono il segnale approssimato.

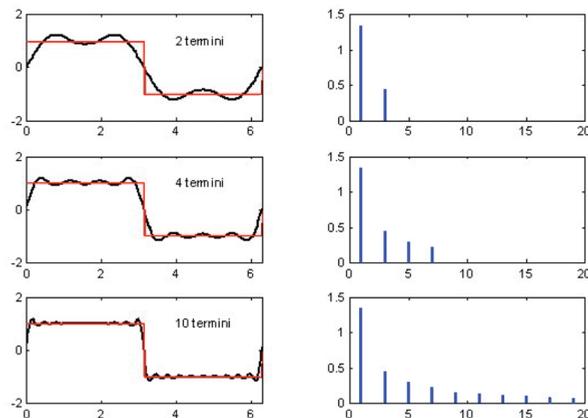


Figura 10: Esempi di approssimazione di un'onda rettangolare con un numero crescente di segnali sinusoidali.

Una variante della trasformata di Fourier è utilizzata nell'algoritmo di compressione delle immagini JPEG per ridurre la dimensione dei file immagine. A differenza di un segnale temporale, che viene rappresentato come una sequenza di sinusoidi, un'immagine viene scomposta in una serie di immagini elementari (funzioni di due dimensioni spaziali) del tipo mostrato in Figura 11.

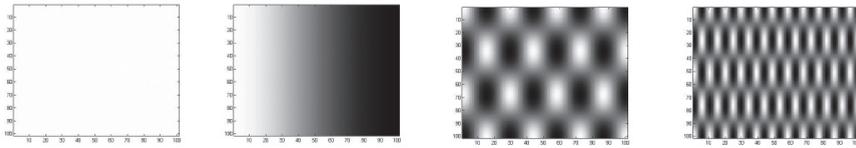


Figura 11: Esempi di funzioni elementari utilizzate nell'algoritmo di compressione JPEG.

Si osservi che un'immagine a colori di  $800 \times 600$  pixel, in cui ognuno dei tre colori fondamentali (rosso, verde, blu) è quantizzato su 256 livelli, e quindi occupa su un byte (8 bit) di informazione, richiede una quantità di memoria pari a  $800 \times 600 \times 3 \text{ byte} = 1.44 \text{ Mbyte}$ . Utilizzando il formato JPEG, invece la stessa immagine richiede meno di 120 Kb, ottenendo pertanto un risparmio di oltre il 90% di memoria. E' bene tuttavia osservare che la compressione JPEG causa una perdita di informazione, e la qualità dell'immagine compressa è tanto migliore quanto più è elevato il numero di funzioni elementari che si vanno sommare (così come si è visto per l'esempio di Figura 8).

La trasformata di Fourier è usata in moltissimi settori dell'ingegneria: in elettronica, per l'elaborazione e il filtraggio di segnali elettrici; nell'informatica, per elaborazione di suoni e la compressione di immagini; in musica, per la sintesi sonora e le elaborazioni timbriche; in medicina, per l'analisi di segnali fisiologici; in astrofisica, per l'analisi della composizione di corpi celesti; in geotecnica, per il sondaggio di terreni nella ricerca del petrolio; in chimica, per l'analisi molecolare di sostanze organiche; in meccanica, per la diagnostica di ingranaggi e strutture meccaniche; e in tanti altri settori della scienza.

## 5. Trigonometria

La trigonometria è la parte della matematica che studia i triangoli, ossia le relazioni tra gli elementi che li caratterizzano, come lati, angoli, e mediane. Essa risulta fondamentale nella grafica computerizzata, per gestire le rotazioni di oggetti, e nella robotica per calcolare le rotazioni dei vari giunti di un robot.

Ad esempio, per disegnare un poligono al computer occorre fornire al programma le coordinate dei suoi vertici rispetto ad una terna fissa  $\{F\}$  di riferimento. Tuttavia, se vogliamo successivamente ridisegnare il poligono in posizioni e orientazioni diverse, è necessario ricalcolare le coordinate dei vertici in funzione dei parametri di traslazione e rotazione. A tal fine, conviene definire una terna mobile  $\{M\}$  solidale all'oggetto, come illustrato in Figura 12.

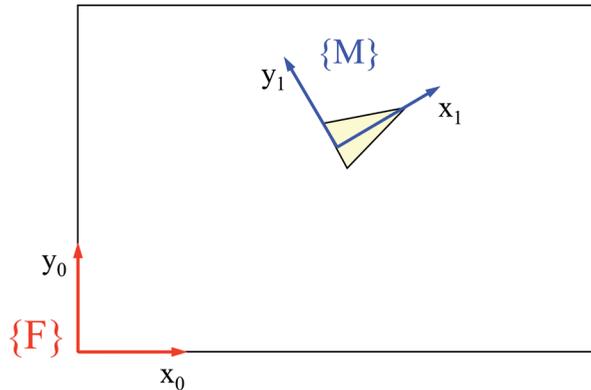
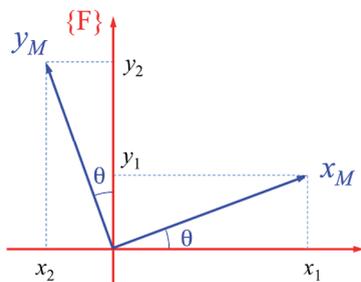


Figura 12: Le coordinate di un poligono possono essere convenientemente espresse rispetto ad una terna di riferimento fissa {F} oppure rispetto ad una terna mobile {M} solidale al poligono.

La terna mobile {M} rispetto a quella fissa {F} può essere espressa mediante:

- un vettore di traslazione  $P_0$ , che rappresenta le coordinate dell'origine di {M} rispetto a {F};
- una matrice di rotazione  $R$ , che rappresenta le coordinate dei versori di {M} rispetto a {F}.

Indicando con  $(x, y)$  le coordinate dell'origine {M} rispetto a {F}, e con  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  le coordinate dei due versori  $x_M$  e  $y_M$ , rispetto a {F}, si avrà che  $P_0$  ed  $R$  sono espressi come indicato in Figura 13.



$$\begin{aligned}
 x_M : \quad & \begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ y_1 = \sin\theta \end{cases} & P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 y_M : \quad & \begin{cases} x_2 = -\sin\theta \\ y_2 = \cos\theta \end{cases} & R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 13: Vettore di traslazione  $P_0$  e matrice di rotazione  $R$  della terna mobile {M} rispetto a quella fissa {F}.

Ora, dato un punto  $P^M$  di coordinate  $(a, b)$  espresso rispetto alla terna mobile {M}, questo può essere espresso rispetto alla terna {F} mediante la seguente trasformazione:

$$P^F = P_0 + R P^M \tag{5}$$

ed esplicitando i termini si ha:

$$P^F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta \\ y + a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Dunque, riprendendo l'esempio di Figura 12, una volta definite le dimensioni del triangolo, le coordinate dei suoi vertici possono essere calcolate mediante la (6), come schematicamente illustrato in Figura 14.

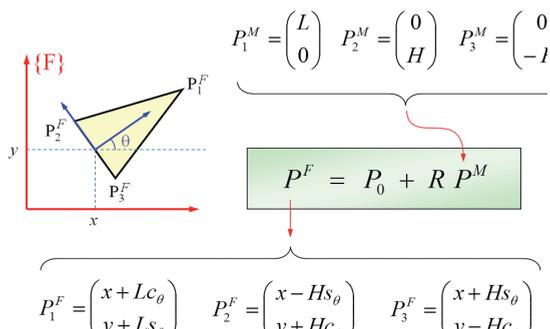


Figura 14: Trasformazione di coordinate dei vertici del triangolo dalla terna  $\{M\}$  a quella fissa  $\{F\}$ .

## 6. Cinematica

La cinematica è un ramo fisica che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto stesso. Una volta caratterizzata la traiettoria di un oggetto in funzione del tempo, le equazioni cinematiche costituiscono un potentissimo strumento matematico per prevedere la posizione futura dell'oggetto.

La cinematica risulta pertanto fondamentale nell'astronomia, per studiare il moto dei corpi celesti e prevedere il possibile impatto di meteoriti sulla Terra; nell'ingegneria aerospaziale, per pianificare le traiettorie di volo di satelliti e sonde spaziali; nell'ingegneria informatica, per progettare sistemi di frenata automatica per treni e automobili, sistemi di difesa (calcolo di traiettorie di missili), sistemi di localizzazione e controllo di droni, sistemi di tracciamento e inseguimento radar, ecc.

Ad esempio, utilizzando propriamente le note equazioni del moto accelerato:

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (7)$$

$$v = v_0 + at \quad (8)$$

è possibile calcolare il tempo e lo spazio di frenata di un'auto che viaggia a velocità  $v_0$ , noto il coefficiente di attrito tra gomma e asfalto, necessario per a calcolare la decelerazione  $a = g$ , dovuta alla frenata, dove  $g$  è l'accelerazione di gravità ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Successivamente, conoscendo i tempi di reazione di un essere umano, si può calcolare la durata minima del giallo in un semaforo per consentire una frenata in sicurezza. Oppure, si può determinare l'intervallo di campionamento massimo di un sensore di distanza da installare su un sistema di guida autonoma, per avere la certezza fermare il veicolo entro una data distanza di sicurezza. O ancora, è possibile calcolare l'istante in cui lanciare un missile di difesa contro un bersaglio tracciato via radar.

## 7. Teoria dei grafi

Un grafo è una struttura astratta formata da un insieme di *nodi* (o *vertici*) collegati da un insieme di *archi*, i quali possono anche avere una direzione (in tal caso il grafo viene detto *diretto*). Data la generalità del formalismo, i grafi possono essere utilizzati per rappresentare relazioni tra oggetti di qualunque tipo e, pertanto, la teoria dei grafi trova largo impiego in numerosi campi della scienza.

Ad esempio, una rete stradale o ferroviaria può essere modellata come un grafo in cui i nodi rappresentano gli incroci e gli archi i tratti di strada fra due incroci. Nel caso della rete Internet, i nodi rappresentano le pagine web e gli archi (orientati) i collegamenti (link) ad esse. In Facebook, i nodi sono gli utenti e gli archi i legami di amicizia. In una molecola, i nodi sono atomi e gli archi i legami chimici. In un torneo sportivo i nodi rappresentano le squadre e gli archi gli incontri fra esse.

Sia ai nodi che agli archi possono essere associate delle variabili che codificano le informazioni di interesse del problema che si sta modellando. La Figura 15 illustra un esempio di grafo diretto utilizzato per rappresentare le relazioni di precedenza tra gli elementi di una computazione parallela. Il numero all'interno di un nodo indica il tempo di calcolo di quel frammento di codice.

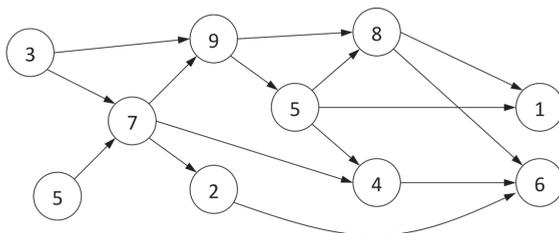


Figura 15: Esempio di grafo *diretto* utilizzato per rappresentare le relazioni esistenti tra gli elementi di una computazione parallela. Il numero all'interno di un nodo indica il tempo di calcolo di quel frammento di codice.

La teoria dei grafi si occupa di analizzare i grafi per derivarne proprietà di interesse, quali ad esempio, la lunghezza del cammino più breve, o più lungo, fra due nodi, l'esistenza di cicli, la raggiungibilità di un nodo, il numero di cammini alternativi, e così via.

Pertanto, nel settore dell'ingegneria informatica, la teoria dei grafi è uno strumento indispensabile per la modellazione, l'analisi e la simulazione di reti di calcolatori, architetture di calcolo parallelo, programmi paralleli, algoritmi di ricerca, sistemi discreti e macchine a stati. Un'applicazione interessante dei grafi è la modellazione di reti neurali (o neuronali), ossia sistemi di calcolo altamente paralleli ispirati al funzionamento del cervello.

## 8. Reti neurali artificiali

Lo studio del cervello ha permesso di sviluppare delle reti neurali artificiali in grado di realizzare memorie associative, riconoscere suoni e immagini, classificare stimoli sensoriali e, soprattutto, apprendere, ossia modificare il proprio comportamento in base agli errori commessi.

Una rete neurale è un insieme di elementi di calcolo, detti neuroni, collegati tra loro attraverso dei *pesi sinaptici*, che possono essere eccitatori ( $> 0$ ) o inibitori ( $< 0$ ). La Figura 16 illustra un esempio di rete neurale con 5 neuroni, la cui uscita assume valori binari.

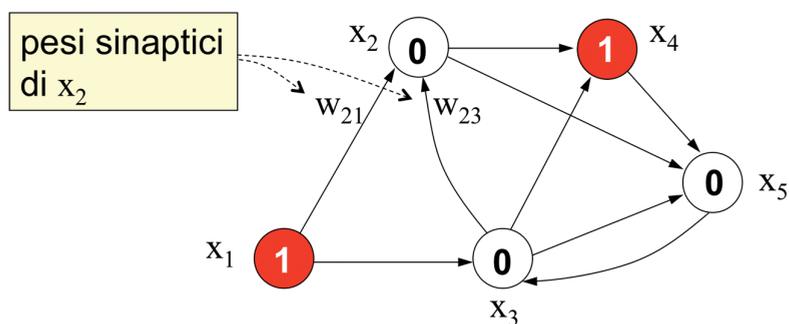


Figura 16: Esempio di una semplice rete neurale con 5 neuroni collegati tra loro mediante connessioni sinaptiche "pesate".

Il numero all'interno di un nodo rappresenta lo stato del neurone, ossia il suo valore di uscita (in questo caso binario).

Ogni neurone riceve in ingresso un certo numero di segnali generati da sensori o provenienti da altri neuroni. Tali segnali vengono moltiplicati per dei pesi sinaptici e poi sommati tra loro per produrre un *valore di attivazione*,  $a$ , analogo al potenziale di membrana di una cellula nervosa. Tale valore viene poi sommato ad un ulteriore valore di soglia ed utilizzato per generare l'uscita.

ta vera e propria del neurone, attraverso una *funzione di uscita*  $f(a)$ . Pertanto, indicando con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  le variabili di ingresso e con  $w_1, w_2, \dots, w_n$  i pesi ad esse associate, l'uscita di un neurone viene calcolata come:

$$y = f(a) = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + \theta\right)$$

La Figura 17 illustra schematicamente il tipico modello di un neurone artificiale.

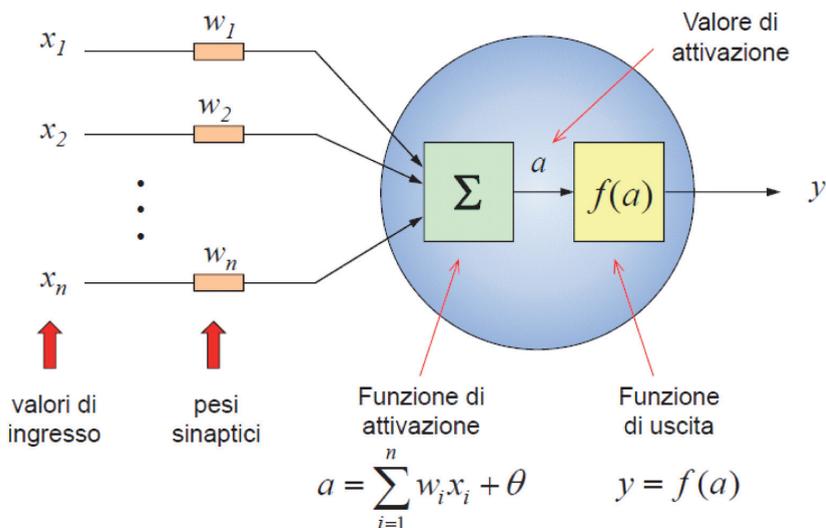


Figura 17: Modello di un neurone artificiale.

La Figura 18 illustra alcuni esempi di funzioni di uscita maggiormente utilizzate nelle reti neurali.

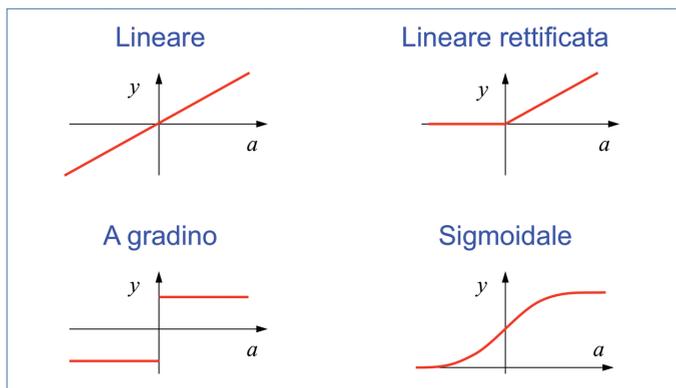


Figura 18: Esempi di funzioni di uscita.

Nel 1982, John Hopfield scoprì un metodo per memorizzare informazioni in una rete neurale al fine di realizzare una memoria associativa. Ad esempio la rete di Hopfield è in grado di memorizzare immagini e recuperarle sulla base di immagini simili, rumorose o distorte. Egli dimostrò che tale proprietà può essere ottenuta se

- tutti i neuroni sono connessi tra loro;
- la funzione di uscita è la funzione segno;
- ogni coppia di neuroni ha pesi simmetrici;
- i neuroni cambiano stato uno per volta.

Sempre nel 1982, Tevuo Kohonen propose un modello di rete neurale capace di auto-organizzarsi per formare delle mappe sensoriali simili a quelle esistenti nella corteccia somatosensoriale, sulla quale viene rappresentato il cosiddetto “homunculus sensitivo”.

Nel 1983, Andrew Barto, Richard Sutton e Charles Anderson riuscirono a sviluppare un nuovo modello di rete neurale in grado di apprendere azioni di controllo sulla base di “premi” e “punizioni”.

Nel 1986, David Rumelhart, Geoffrey Hinton e Ronald Williams svilupparono un algoritmo di apprendimento, noto come Backpropagation, che permette ad una rete neurale di imparare problemi di classificazione attraverso un insieme di esempi. La rete riesce poi a generalizzare, classificando correttamente esempi mai visti durante la fase di apprendimento.

A partire dal 2006, la ricerca sulle reti neurali ha avuto una grossa impennata, grazie allo sviluppo di nuove tecniche di apprendimento che consentono di addestrare reti molto più grandi, costituite da migliaia di neuroni organizzati su numerosi strati, e pertanto chiamate “deep neural network”.

Sfruttando la potenza computazionale delle moderne piattaforme di calcolo parallelo, tali reti sono in grado di risolvere problemi complessi, quali il riconoscimento di caratteri scritti a mano, immagini e volti umani, o il riconoscimento di suoni e voce. Le prestazioni ottenute, in termini di accuratezza del riconoscimento e capacità di generalizzazione, migliorano di anno in anno e risultano sempre più vicine alle capacità umane. Attualmente, le reti neurali vengono utilizzate dalle maggiori aziende informatiche, come Google, Microsoft e Facebook, per classificare l'enorme mole di dati esistente nei loro server, ma anche nei cellulari di ultima generazione, per la realizzazione di interfacce vocali, o nei sistemi di guida autonoma di veicoli, per il riconoscimento di scenari complessi.

## 9. Conclusioni

Questo lavoro ha illustrato alcuni esempi di come la matematica costituisca uno strumento indispensabile in diversi settori dell'ingegneria. In particolare, nel campo dell'ingegneria informatica, diverse tecniche matematiche sono utilizzate per modellare, analizzare e prevedere il comportamento di sistemi fisici. Codificando tali modelli in un programma ed eseguendo tale programma su un calcolatore è possibile simulare l'evoluzione del sistema al variare di un gran numero di parametri e condizioni iniziali, al fine di prevederne il comportamento in situazioni di interesse.

Tuttavia, la matematica viene spesso insegnata (a tutti i livelli, dalle scuole elementari all'università) come una sfilza di regole, teoremi e dimostrazioni, trascurando le motivazioni che rendono quei risultati o quegli strumenti importanti, e a volte indispensabili, nello sviluppo della tecnologia moderna. In assenza delle giuste motivazioni, la maggior parte degli studenti tende a considerare la matematica come un insieme di regole "aride", da mandar giù come pillole amare per superare l'esame. Poi immancabilmente succede, a chi decide di intraprendere un lavoro nel settore tecnologico, di comprendere – ahimè troppo tardi – l'importanza di quei teoremi o di quei metodi studiati a memoria. E in questi casi viene di pensare: "però, se mi avessero detto cosa potevo farci con un'equazione differenziale, magari l'avrei studiata con maggiore interesse!".

Per appassionare gli studenti ad una materia (e questa considerazione vale per tutte le materie e a tutti i livelli di istruzione) è importante far vedere "a cosa può servire" nella vita, attraverso una serie di esempi concreti di come quel tipo di conoscenze sono state utilizzate per risolvere problemi pratici. Quando si riesce ad apprezzare l'utilità pratica di un metodo, ci si predispone più positivamente ad impararlo e ci si addentra più volentieri nei dettagli tecnici.

Al fine di attirare l'attenzione degli studenti su un argomento (a maggior ragione se astratto), i problemi posti e gli esempi forniti devono essere interessanti, attuali, stuzzicanti e, perché no, anche divertenti. In generale, per una migliore didattica, è importante integrare la teoria con una parte applicativa che illustri come la teoria possa essere utilizzata per costruire qualcosa che funzioni in pratica.

Naturalmente non sempre è facile, da parte di un docente, trovare motivazioni ed esempi interessanti e divertenti, e soprattutto mostrare realizzazioni pratiche di una teoria. Ma questo tipo di "ricerca" dovrebbe rientrare tra i compiti richiesti a un docente e far parte di corsi di formazione dedicati all'insegnamento. Tale compito è sicuramente agevolato dall'uso del com-

puter o di strumenti multimediali, che possono essere di enorme supporto nello sviluppo di tali progetti.

### **Riferimenti Bibliografici**

10. «Modello\_matematico,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Modello\\_matematico](https://it.wikipedia.org/wiki/Modello_matematico).
11. «Algebra di Boole,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Algebra\\_di\\_Boole](https://it.wikipedia.org/wiki/Algebra_di_Boole).
12. «Equazione differenziale,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione\\_differenziale](https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_differenziale).
13. «Trasformata di Laplace,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata\\_di\\_Laplace](https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Laplace).
14. «Trasformata di Fourier,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata\\_di\\_Fourier](https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Fourier).
15. «Trigonometria,» [Online]. Available: <https://it.wikipedia.org/wiki/Trigonometria>.
16. «Cinematica,» [Online]. Available: <https://it.wikipedia.org/wiki/Cinematica>.
17. «Teoria dei grafi,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dei\\_grafi](https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_grafi).
18. «Rete neurale artificiale,» [Online]. Available: [https://it.wikipedia.org/wiki/Rete\\_neurale\\_artificiale](https://it.wikipedia.org/wiki/Rete_neurale_artificiale).

## IL RUOLO DELLA MODELLISTICA MATEMATICA E DELLA SIMULAZIONE NUMERICA NELLE NANOTECNOLOGIE

Paolo Pintus<sup>1</sup>

### SOMMARIO

Negli ultimi decenni, le nanotecnologie hanno rappresentato, e costituiscono tuttora, uno dei settori di ricerca più importanti e prolifici delle scienze. Dalla fisica alla biologia, dall'ingegneria alla chimica, i campi di interesse sono molteplici e trasversali. In questo articolo, rivisitando la storica lezione del premio Nobel Richard Feynman, spiegheremo cosa si intende per nanotecnologie, perché sono importanti e come è possibile realizzare oggetti nanometrici. In questo ambito la matematica riveste un ruolo di particolare rilievo, sia per quanto riguarda la modellizzazione dei fenomeni fisici, sia per la risoluzione numerica delle equazioni da essa derivanti. La matematica applicata rappresenta un importante strumento per lo studio e la fabbricazione di oggetti nanometrici, permettendo la simulazione di molteplici fenomeni fisici (simulazione multi-fisica) su scale spaziali e temporali molto differenti (modellizzazione multi-scala).

### COSA SONO LE NANOTECNOLOGIE E PERCHÉ SONO IMPORTANTI?

Il termine “nanotecnologia” deriva dalla parola nanometro (abbreviato nm), ovvero la lunghezza che rappresenta la miliardesima parte di un metro. Le nanotecnologie sono una branca della scienza applicata che si occupa di studiare e progettare dispositivi di dimensioni estremamente ridotte, le cui lunghezze caratteristiche più piccole variano da pochi nanometri ad alcune centinaia di nanometri. Per prendere familiarità con queste dimensioni, in figura 1, sono riportati alcuni oggetti presenti in natura ed alcuni dispositivi fabbricati dall'uomo. Oggetti così piccoli non sono ovviamente visibili ad occhio nudo, ma sono necessari appositi microscopi. Si pensi infatti che il diametro di un capello umano è di circa centomila nanometri mentre il diametro di un atomo è tipicamente compreso tra 0.06 nm e 0.6 nm, quindi in un nanometro sono contenuti pochi atomi (e.g., tra 16 a meno di 2 a seconda dell'elemento chimico).

---

<sup>1</sup> Scuola Superiore Sant'Anna, Pisa, Italy - University of California Santa Barbara, Santa Barbara, CA, USA  
paolo.pintus@sssup.it, ppintus@ece.ucsb.edu

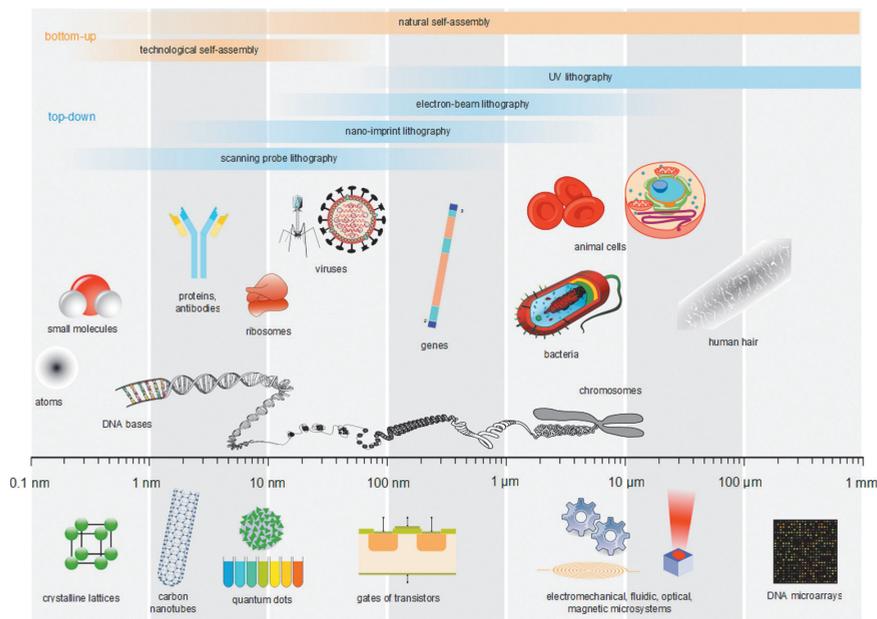


Figura 1. Confronto delle dimensioni di vari oggetti biologici e tecnologici [1]

Lo scienziato che per primo profetizzò la possibilità di fabbricare dispositivi così piccoli fu Richard Feynman durante una seminario dall'evocativo titolo "There's Plenty of Room at the Bottom" (Trad. "C'è un sacco di spazio laggiù in fondo") da lui tenuto al California Institute of Technology (CalTech) il 29 dicembre del 1959 [2,3]. Con la parola "bottom" lo scienziato si riferiva al fondo della scala delle lunghezze, immaginando di creare oggetti piccolissimi che potessero contenere più informazioni o venissero utilizzati per manipolare l'infinitamente piccolo.

Come primo esempio di applicazione delle nanotecnologie, Feynman immaginò di poter riscrivere interamente i 24 volumi dell'enciclopedia britannica sulla punta di uno spillo con un fattore di scala di 1:25 000. Dopo aver spiegato come fare, Feynman si pose il problema di come poter leggere questa versione miniaturizzata dell'enciclopedia. I microscopi utilizzati all'epoca erano il microscopio ottico ed il microscopio elettronico dotati di una risoluzione rispettivamente di 200 nm e 1 nm. Feynman ipotizzò la realizzazione di nuovi strumenti più potenti. I microscopi da lui immaginati verranno realizzati circa 20 anni più tardi: il microscopio ad effetto tunnel nel 1981 (per il quale gli inventori vinsero il premio Nobel) ed il microscopio a forza atomica nel 1986. Questi dispositivi hanno una risoluzione compresa tra 0.1 nm e 0.01 nm e sono entrambi caratterizzati da una piccola punta che scansiona la superficie da esplorare. Il microscopio ad effetto tunnel misura una piccola corrente elettrica che passa dalla superficie alla punta, mentre il microscopio a forza atomica misura l'interazione tra la punta e le forze di van der Waals sulla superficie del campione. Da queste misure si riesce a ricostruire il profilo della superficie esplorata.

Con grande anticipo sui tempi, lo scienziato descrisse inoltre i benefici che sarebbero derivati dalla miniaturizzazione dei computer (i.e., dei processori elettronici) in termini di velocità di calcolo e consumo di potenza. L'evoluzione della microelettronica ha infatti comportato non solo lo sviluppo dell'informatica ma quello di tutte le scienze in generale. Questo progresso è legato alla miniaturizzazione dei transistor, ovvero i milioni di interruttori presenti nei processori dei nostri computer e cellulari. La figura 2 mostra l'evoluzione nel tempo dei transistor sino al 2011 per di-

versi produttori (AMD, IBM, Intel e Motorola). Come è possibile osservare dal grafico, il numero di transistor per unità di area è cresciuto costantemente nel tempo raddoppiando ogni 18 mesi circa (asse di sinistra). Questa relazione empirica è chiamata legge di Moore, dal nome di colui (Gordon Moore) che per primo la formulò nel 1965 [5]. Parallelamente al numero di transistor per chip, si sono ridotte notevolmente le dimensioni dei componenti (asse di destra) sino a raggiungere le dimensioni di poche decine di nanometri, ovvero poche centinaia di atomi.

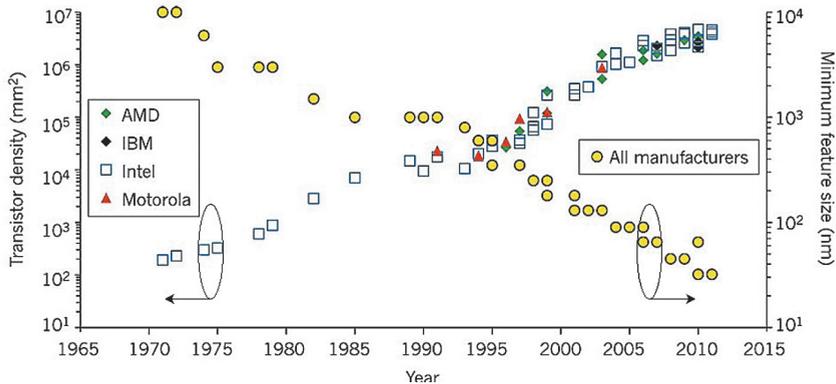


Figura 2. Evoluzione del numero di transistor (asse di sinistra) ed dimensioni del minimo componente (asse di destra) dal 1971 ai giorni nostri [4].

Per comprendere quanto significativo sia stato il miglioramento delle prestazioni dei transistor negli ultimi decenni, è sufficiente confrontare la prima generazione di transistor nel microchip Intel 4004 (A.D. 1971) con la 5ª generazione di transistor nei processori i5 (A.D. 2015). Un singolo transistor del processore i5 è 3'500 volte più veloce (frequenza di Clock), consuma 90 000 volte meno energia, e costa 60 000 volte meno del suo corrispettivo nel processore Intel 4004. Per rendere questo confronto comprensibile ad un pubblico più ampio, l'amministratore delegato di Intel, Brian Krzanich, ha spiegato che sarebbe come se il Maggiolone della Volkswagen fosse stato migliorato negli ultimi 34 anni a tal punto che questo sarebbe in grado di raggiungere la velocità massima di 483 000 Km/h con un consumo di 850 000 km/litro, mentre la vettura avrebbe un costo di appena 4 centesimi [6]. Questo semplice esempio evidenzia quanto rivoluzionari siano stati i progressi della tecnologia nel campo dell'elettronica.

Ovviamente, la miniaturizzazione dei transistor non può procedere all'infinito, visto che le dimensioni degli atomi costituiscono un limite minimo alle dimensioni raggiungibili. Per questo si è spesso parlato della fine della legge di Moore [7,8]. Questo non vuol dire che il progresso tecnologico si fermerà, ma piuttosto sarà necessario un cambio di paradigma, le cose si potrebbero fare più interessanti ed i nanotecnologi sono alla ricerca di nuove soluzioni e materiali innovativi [8].

Le nanotecnologie potrebbero fornire importanti soluzioni anche in ambito medico. Come in un film di fantascienza, Feynman suggerì la bizzarra idea di "ingoiare il dottore" per curare una valvola cardiaca o un organo che non funziona [2,3]. Ai giorni nostri, biologi e ingegneri biomedici si sono spinti ben oltre, e sono alla ricerca di soluzioni per guarire le cellule danneggiate all'interno del nostro corpo. Una possibile soluzione è quella di chiudere un farmaco all'interno di nanotrasportatori che solo le cellule malate sono in grado di aprire (e.g. i nanotubi di carbonio [9-11]). Se queste ricerche avranno successo, in futuro sarebbe possibile curare un tumore anche in casi in cui la malattia si trovasse ad uno stadio molto avanzato.

I campi di applicazione delle nanotecnologie ed i benefici ad essi connessi vanno al di là di quelli immaginati da Feynman e non si limitano solo all'informatica ed alla medicina. Un esempio sono i sistemi micro elettro-meccanici presenti su numerosissimi dispositivi elettronici (in inglese Micro Electro-Mechanical Systems o MEMS) [12,13]. Fanno parte di questa famiglia gli accelerometri ed i giroscopi che vengono utilizzati per misurare le variazioni di velocità e rotazione. Questi dispositivi sono presenti nelle automobili per controllare i sistemi di frenata e l'apertura degli airbag, nei sistemi di navigazione per definire la rotta, vengono utilizzati nei robot permettendo di identificare la posizione dei giunti, mentre nei cellulari e nei tablet stabiliscono se sia necessario ruotare lo schermo. Inoltre, le loro ridotte dimensioni permettono la loro integrazione in numerosi dispositivi portatili.

Una nuova frontiera della ricerca nelle nanotecnologie è quella degli smart materials o materiali intelligenti. Rientrano in questo ambito i materiali nanostrutturati. Prendendo ispirazione dalla natura, gli scienziati hanno studiato come "riprodurre" la rugosità presente sulla pelle dello squalo [14-17]. Le piccolissime squame mostrate in figura 3a, permettono di rompere i piccoli vortici che si creano sulla superficie della pelle riducendo l'attrito dell'animale con l'acqua. A questo scopo sono state sintetizzate speciali vernici per ricoprire le ali degli aerei e ridurre l'attrito con l'aria. Secondo i calcoli dei ricercatori, se si potesse applicare a ogni aereo in tutto il mondo, questa vernice permetterebbe di risparmiare più di 4 milioni di tonnellate di carburante ogni anno [17]. Al contrario, le minuscole setole (setae) presenti sulla superficie delle zampe del gecko permettono a queste di aderire a qualunque superficie senza l'utilizzo di speciali colle. Recenti studi hanno dimostrato che le forze attrattive che tengono i gechi attaccati alle superfici sono interazioni di van der Waals tra setae finemente divise fra loro e le superfici stesse [18-20]. Sulle zampe dei gechi vi sono circa 14'100 setae per millimetro quadrato, che si dividono in centinaia di diramazioni e le cui estremità sono larghe solo 200 nm, come mostrato in figura 3b [21]. Il fatto che queste interazioni non coinvolgano liquidi né gas è fondamentale: in teoria uno stivale fatto di setae sintetiche potrebbe aderire alla superficie della Stazione Spaziale Internazionale come alla parete di una stanza qualsiasi.

Lo spazio per le nanotecnologie e le sue applicazioni è quindi limitato solo dall'immaginazione di ricercatori e scienziati che continuamente sviluppano soluzioni per problemi di interesse quotidiano.



Figura 3.a Squame presenti sul dorso del grande squalo bianco, Credit Trevor Sewell/Electron Microscope Unit, University of Cape Town [14]

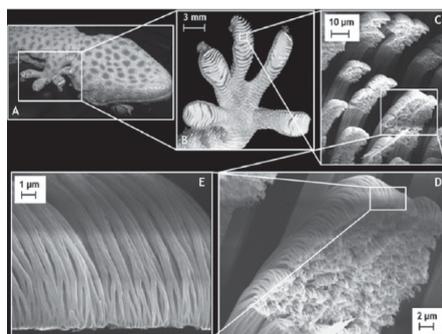


Figura 3.b Setae sulle zampe del gecko. [21]

### 1.1.1 Come possiamo “costruire” nanostrutture?

Le tecniche utilizzate per la fabbricazione di nanostrutture e nano-dispositivi sono numerosissime e sarebbe presuntuoso e praticamente impossibile provare a descriverle in poche righe. Cercheremo quindi di dare un breve “*assaggio*” di alcuni metodi utilizzati.

Nelle tecniche di fabbricazione si distinguono due approcci detti rispettivamente bottom-up e top-down. Il primo consiste nel costruire un oggetto nanometrico partendo dai suoi componenti elementari come le molecole o perfino i singoli atomi. Il secondo consiste invece nel modificare oggetti macroscopici rimuovendo o aggiungendo “materiale” dove necessario.

La tecnica *self-assembly* è un esempio di approccio bottom-up in cui le molecole tendono ad auto-assemblarsi ed organizzarsi tra loro. Nel caso mostrato in figura 4.a, le molecole sono libere di muoversi in una soluzione e tendono ad organizzarsi legandosi alla superficie d'oro formando una struttura ordinata [22]. Un altro approccio bottom-up, molto più estremo, consiste nello spostare singolarmente gli atomi applicando ad essi una piccola forza tramite la punta di una sonda. Nella figura 4.b-d sono mostrate alcune realizzazioni in cui gli atomi presenti sulla superficie di un materiale sono stati spostati per formare alcune figure geometriche [23,24] o la scritta IBM [25]. E' interessante notare come gli atomi sulla superficie di un cristallo formino delle increspature come sulla superficie di uno stagno o di un lago. Questo è dovuto alla duplice natura della materia: ondulatoria e corpuscolare, visibile su scale nanometriche e sub-nanometriche. Come è facile immaginare, quest'ultima tecnica è estremamente lenta e costosa. Per questo motivo, la fabbricazione di dispositivi su larga scala è fatta tramite tecniche molto più veloci che permettono di processare e costruire milioni di dispositivi contemporaneamente.

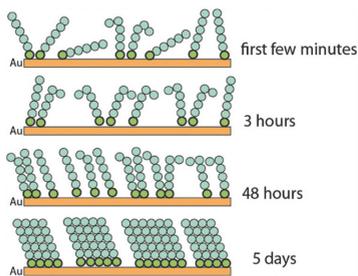


Figura 4.a Self-assembly di molecole su una superficie d'oro [22]

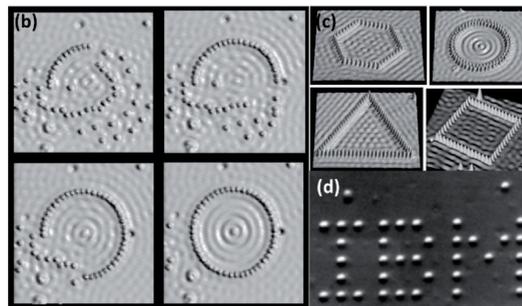


Figura 4.b-4.c Atomi di Ferro su superficie di Rame [23,24], figure 4.d atomi di Xenon su superficie di Nichel [25].

Le tecniche di litografia ottica, ampiamente utilizzate in micro-elettronica, sono un esempio di approccio top-down. Le principali fasi della litografia sono riportate in figura 5 e non sono molto differenti dalla litografia utilizzata per realizzare quadri ed immagini artistiche [26]. Nel caso riportato in figura si parte da uno strato di biossido di silicio ( $\text{SiO}_2$ ) cresciuto su uno strato di silicio (Silicon). Su questo campione viene depositato uno strato di materiale fotosensibile chiamato photoresist (Figura 5.b) che viene impressionato tramite una sorgente ultravioletta (Figura 5c). L'utilizzo di una maschera realizzata su vetro (glass) permette di coprire alcune parti del photoresist e lasciarne esposte altre. Il materiale esposto alla luce ultravioletta cambia la natura dei propri legami chimici diventando più duro, mentre il materiale coperto dalla maschera resta più soffice e può essere rimosso tramite un solvente come mostrato in Figura 5.d. A questo punto, una soluzione di acido fluoridrico (HF) può essere usato per corrodere lo strato di  $\text{SiO}_2$  (figura 5.d) ed infine

il photoresist viene rimosso tramite un solvente chimico. Comparando le figure 5.a e 5.f, è chiaro come il risultato della litografia sia quello di aver rimosso parte del materiale creando un pattern (una forma) sull'ossido. Alternando la litografia a step di deposizione, è possibile aggiungere e rimuovere materiale dove necessario, strato dopo strato. Per una descrizione più dettagliata di queste ed altre tecniche, rimandiamo a testi più specifici [26-28].

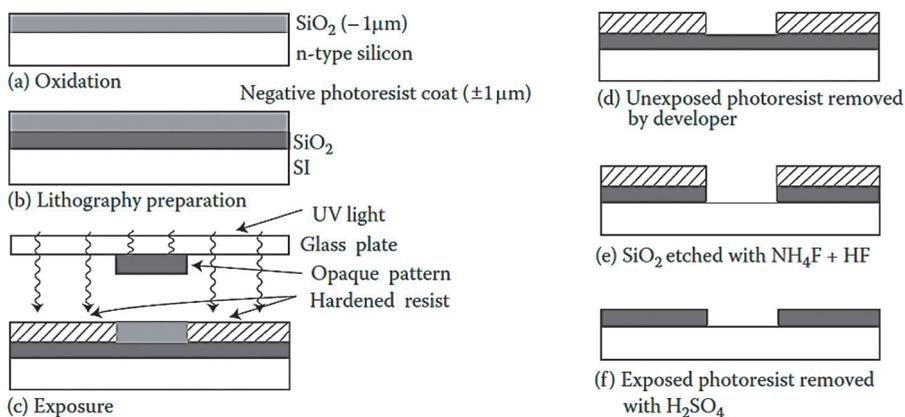


Figura 5. Principali fasi della tecnica di litografia ottica [26]

### 1.1.2 Quale è il ruolo della matematica?

A questo punto è naturale chiedersi quale sia il ruolo nella matematica in questo ambito. Per rispondere vogliamo citare una celebre frase dello scienziato pisano Galileo Galilei: “La matematica è l’alfabeto con il quale Dio ha scritto l’Universo.” Essa costituisce infatti il linguaggio e lo strumento con cui è possibile descrivere il comportamento dei fenomeni fisici presenti in natura. La figura 6 da un’interpretazione di questo “modo di vedere” la natura attraverso le equazioni che descrivono i processi chimici e fisici presenti in un paesaggio naturale.

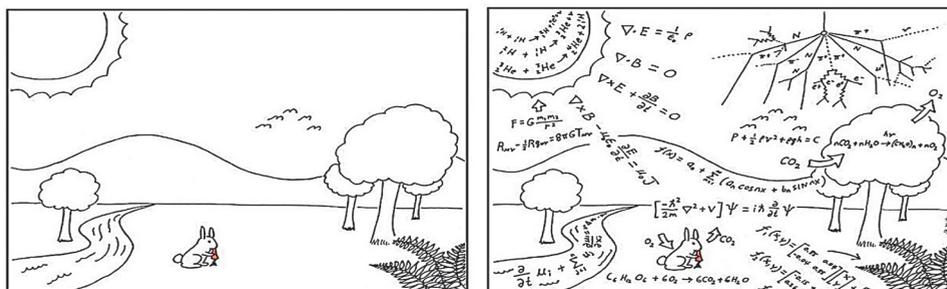


Figura 6. Come uno scienziato vede il mondo [29]

Tra le equazioni matematiche in figura, possiamo riconoscere le equazioni di Maxwell che descrivono la propagazione delle onde elettromagnetiche (e.g., la radiazione solare), l’equazione di Navier-Stokes che modella il flusso di un fluido (e.g., lo scorrere di un fiume), la serie di Fourier che permette di decomporre una qualunque funzione periodica (e.g., il profilo delle montagne) in somma di funzioni trigonometriche. Lasciamo al lettore il piacere di individuare ed interpretare le altre equazioni riportate in figura.

La matematica costituisce quindi un potente strumento per le scienze applicate. Permette infatti di descrivere in maniera quantitativa i fenomeni osservati e poter prevedere certi fenomeni osservabili. Questa area della matematica è tipicamente indicata come fisica-matematica. Tuttavia, l'importanza della matematica non è limitata solo alla modellizzazione dei fenomeni naturali, ma anche alla risoluzione delle equazioni matematiche che li descrivono. Infatti, nonostante la soluzione analitica di un problema si possa calcolare solo in casi semplici, l'analisi numerica fornisce gli strumenti per trovare una soluzione che meglio approssimi la soluzione reale, con un grado di precisione migliorabile a piacere.

Nel campo delle nanotecnologie si possono distinguere due aspetti importanti della matematica. Uno riguarda lo studio dei fenomeni fisici e chimici che viene indicato con il termine di analisi. L'altro riguarda la fabbricazione di nuovi dispositivi che prende il nome di sintesi o design. Quest'ultimo è l'aspetto ingegneristico in cui il ricercatore progetta il nano-dispositivo affinché questo realizzi una funzione specifica. Disporre di un modello matematico accurato rappresenta uno strumento prezioso ed indispensabile per la realizzazione di un dispositivo affidabile.

### 1.1.3 La modellistica fisico-matematica

I modelli matematici utilizzati per l'analisi e la sintesi nel campo delle nanotecnologie sono spesso, ma non solo, equazioni differenziali. In figura 7 abbiamo riportato alcuni esempi e le relative equazioni differenziali che li modellizzano.

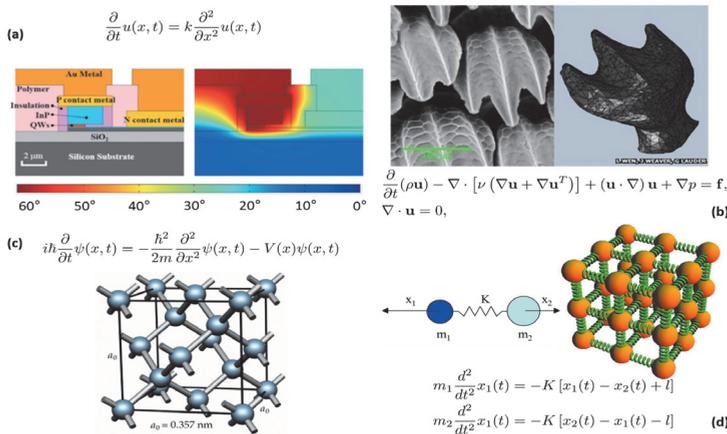


Figura 7.a Riscaldamento in un laser integrato [30], Figura 7.b Studio della idrodinamica della squama di uno squalo [31], Figura 7.c Equazione di Schoedinger e modello della struttura del silicio [32], Figura 7.d Modello di un cristallo dove i legami sono rappresentati da molle [33].

In figura 7.a è riportato lo studio della diffusione del calore all'interno di un laser integrato [30]. Nei dispositivi elettronici ed elettro-ottici le correnti elettriche utilizzate possono causare un riscaldamento del dispositivo che può degradarne le prestazioni. Per questo motivo è importante progettare dei circuiti integrati in grado di dissipare il calore evitando il surriscaldamento degli stessi. Quando il calore non viene dissipato ma aumenta al trascorrere del tempo, si parla di fuga termica. La temperatura del dispositivo aumenta sino a non essere più controllabile e il dispositivo si brucia. Un altro problema che abbiamo presentato nell'introduzione di questo articolo riguarda lo studio delle turbolenze tra la pelle dello squalo e l'acqua del mare. Per studiare questo problema dobbiamo risolvere l'equazioni di Navier-Stokes riportata in figura 7.b [31]. Procedendo su scale più piccole, l'equazione di Schrödinger permette di descrivere la propagazione di un elettrone

all'interno di un semiconduttore come il silicio in figura 7.c [32]. I moti di vibrazione tra gli atomi di un cristallo possono essere studiati generalizzando la legge di Hooke, che descrive il comportamento elastico di una molla come in figura 7.d [33]. In figura 7 abbiamo riportato una piccola selezione, ma i problemi e le equazioni da studiare sono assai più numerosi. I modelli utilizzati possono essere a volte molto complessi e richiedere formalismi più raffinati come quelli della meccanica quantistica. Tuttavia, come già detto, è spesso necessario risolvere un'equazione differenziale più o meno complicata. Come fare?

### 1.1.4 L'analisi numerica

L'analisi numerica fornisce gli strumenti per trovare la miglior approssimazione alla soluzione di un problema reale. Ovvero, usando le parole del matematico Lloyd N. Trefethen: "L'Analisi Numerica è lo studio degli algoritmi per i problemi della matematica del continuo."

Proviamo a dare un piccolo esempio cercando di risolvere un semplice problema differenziale. Per fare questo, consideriamo un caso molto semplice

$$\begin{cases} -f''(x) = g, & 0 < x < L, \\ f(0) = 0, & f(L) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

dove  $g$  è una costante e la funzione  $f(x)$  si annulla ai bordi del dominio, ovvero in  $0$  ed  $L$ . Questo problema governa, ad esempio, la configurazione di equilibrio di un filo elastico (con tensione pari ad uno) fissato agli estremi e soggetto alla forza di gravità ( $g < 0$ ) [34], in tal caso la funzione  $f(x)$  rappresenta quindi lo spostamento dalla configurazione di equilibrio (assenza di forza).

In figura 8 riportiamo l'immagine di un nanofilo di platino. I nanofili possono essere utilizzati come sensori di gas. L'interazione tra il materiale di cui è composto il filo e il gas possono cambiare le proprietà meccaniche ed elettriche del filo, permettendoci di capire quale è la concentrazione del gas nell'ambiente circostante. Può essere interessante chiederci quale sia la deformazione del filo a causa del proprio peso.

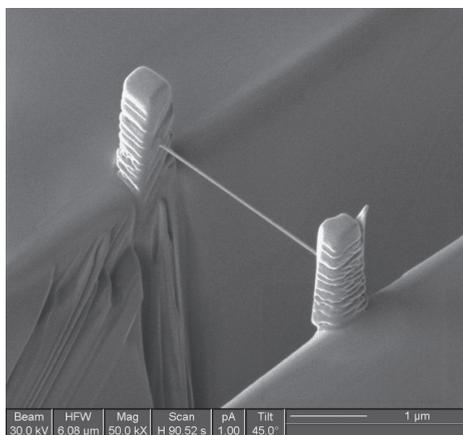


Figura 8. Peter Heard, nano-filo di platino con diametro di 50 nm per monitoraggio di gas [35].

In questo caso specifico, è facile ricavare la soluzione analitica del problema. Basta infatti integrare l'equazione due volte ed imporre le condizioni al contorno,

$$f(x) = -g \frac{x}{2} (x - L) \tag{2}$$

Proviamo ora a risolvere il problema supponendo di non riuscire a trovare la soluzione analitica. Per fare ciò, possiamo approssimare la derivata eliminando l'operazione di limite e considerando un valore di  $h$  sufficientemente piccolo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Con ragionamenti analoghi si può approssimare la derivata seconda come

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{4}$$

Le approssimazioni (3) and (4) introducono un errore che sarà tanto più piccolo, quanto più piccolo è l'intervallo  $h$  considerato. Supponiamo ora di dividere l'intervallo  $[0, L]$  in 6 intervalli equispaziati di lunghezza  $h$ . Usando la equazione (4), possiamo riscrivere il problema differenziale (1) nei punti interni dell'intervallo  $x_1, \dots, x_5$ . Avremo quindi 5 equazioni, una per ogni punto:

$$\begin{cases} f_2 - 2f_1 + f_0 = g \cdot h^2 \\ f_3 - 2f_2 + f_1 = g \cdot h^2 \\ f_4 - 2f_3 + f_2 = g \cdot h^2 \\ f_5 - 2f_4 + f_3 = g \cdot h^2 \\ f_6 - 2f_5 + f_4 = g \cdot h^2. \end{cases} \tag{5}$$

Nel sistema (5),  $f_1, \dots, f_5$  rappresentano i valori della soluzione approssimata calcolata nei punti  $x_1, \dots, x_5$ . In conclusione, abbiamo trasformato un problema differenziale in un sistema di equazioni algebriche. Il metodo usato prende il nome di metodo alle differenze finite perché consiste nell'approssimare il limite del rapporto incrementale (i.e., la derivata) con il rapporto tra due differenze finite. Per calcolare la soluzione è sufficiente risolvere il sistema lineare ottenuto. Questo ci permette di conoscere la soluzione approssimata nei punti  $x_1, \dots, x_5$ , mentre fuori da essa la funzione può esser considerata lineare a tratti, come mostrato in figura 9.

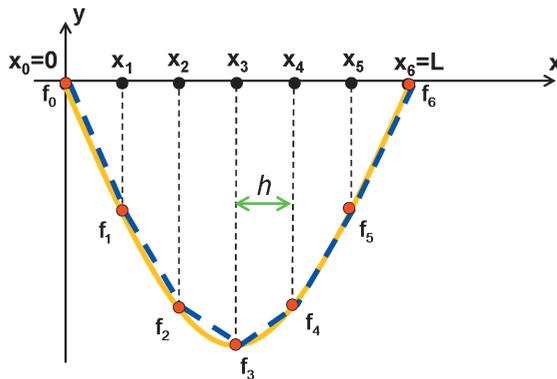


Figura 9. Metodo delle differenze finite.

Sofferamoci ora sulla risoluzione del sistema lineare ottenuto. Per fare ciò, possiamo utilizzare il metodo di Cramer insieme al metodo di Laplace per il calcolo dei determinanti, oppure possiamo utilizzare il metodo di sostituzione, noto anche come metodo di Gauss. Se dovessimo calcolare la soluzione a mano per un sistema di piccole dimensioni si è soliti preferire il metodo di Cramer perché molto semplice ed ordinato: si dispongono i coefficienti in tabelle (matrici) e si calcolano i determinanti. Il metodo di Gauss è invece più tedioso e consiste nel combinare linearmente le equazioni. Tuttavia, se contassimo le operazioni fatte utilizzando i due metodi ci accorgeremmo che il numero di calcoli per ottenere la soluzione con il metodo di Cramer è nettamente superiore a quelli del metodo di Gauss. Poiché un computer esegue un numero limitato di operazioni al secondo, il tempo cresce enormemente nel caso del metodo di Cramer, mentre resta piccolo se utilizziamo il metodo di Gauss.

In tabella sono riportati i tempi di calcolo per risolvere dei sistemi lineari di dimensioni crescenti, partendo da 12 equazioni sino a 50 equazioni [36]. Come possiamo osservare, i tempi di calcolo per trovare la soluzione con l'algoritmo di Cramer sono enormi e superiori all'età geologica della terra che è di circa 4.5 miliardi di anni ( $4.5 \cdot 10^9$  anni)

**Tabella 1.1** Tempi di calcolo per la risoluzione di un sistema lineare

$n$	Cramer + Laplace	Gauss
12	23 minuti	$1.2 \cdot 10^{-5}$ secondi
13	6 ore	$1.5 \cdot 10^{-5}$ secondi
14	4 giorni	$1.8 \cdot 10^{-5}$ secondi
20	617175 anni	$5.3 \cdot 10^{-5}$ secondi
30	$1.5 \cdot 10^{20}$ anni	$1.8 \cdot 10^{-4}$ secondi
40	$8.3 \cdot 10^{35}$ anni	$4.3 \cdot 10^{-4}$ secondi
50	$4.8 \cdot 10^{52}$ anni	$8.3 \cdot 10^{-4}$ secondi

Le dimensioni dei sistemi lineari da risolvere possono facilmente raggiungere le 100 000 equazioni per un problema semplice, e superare diversi milioni di equazioni nei casi più complessi! Il numero di operazioni di un algoritmo viene chiamato complessità computazionale ed è uno dei criteri fondamentali per cui scegliere un metodo di risoluzione piuttosto che un altro. Se indichiamo con  $n$  il numero di equazioni da risolvere, nel caso del metodo di Gauss dovremmo fare circa  $n^3/3$  operazioni, mentre nel caso del metodo di Cramer le operazioni sono dell'ordine di  $n!$ , dove il fattoriale di  $n$  può essere approssimato con un esponenziale per  $n$  grande.

Poiché i sistemi lineari possono avere grandi o grandissime dimensioni ed il tempo di calcolo dipende da quante operazioni facciamo è necessario sviluppare metodi numerici molto efficienti.

### 1.1.5 Simulazione multi-fisica e simulazione multi-scala

Una nuova frontiera della matematica applicata riguarda lo studio di problemi multi-fisica, ovvero dove più fenomeni sono osservabili e devono essere studiati contemporaneamente. Per esempio, le correnti elettriche in un circuito possono essere studiate tramite le equazioni di Maxwell, ma le stesse possono causare un riscaldamento del circuito che viene analizzato tramite l'equazione del calore. Lo stesso riscaldamento causa spesso una variazione delle proprietà elettriche e termiche per cui le due equazioni devono essere risolte insieme. Nell'esempio in figura 7.b, il flusso dell'acqua del mare può piegare le squame presenti sulla pelle dello squalo, sarà necessario combinare le equazioni della fluidodinamica con quelle della meccanica. Attualmente esistono potenti software commerciali che permettono di combinare tra loro fenomeni fisici differenti [37, 38], ma nei casi più specifici è necessario sviluppare soluzioni ad-hoc.

A volte anche le scale temporali e spaziali del problema sono molto differenti. Per simulare l'inte-

razione tra l'acqua del mare e le squame presenti sulla pelle dello squalo abbiamo necessità di una accuratezza di qualche migliaio di nanometri, ma la superficie della pelle dell'animale è di qualche metro quadrato. Per modellizzare correttamente la riduzione dell'attrito tra l'animale ed il fluido circostante è necessario combinare tra loro modelli differenti con una risoluzione spaziale (una scala) differente.

### 1.1.6 Conclusioni

Per concludere, è evidente che la matematica, insieme alla fisica ed alla chimica, è alla base del rapido sviluppo delle nanotecnologie. In particolare, la fisica matematica e l'analisi numerica hanno fornito gli strumenti per comprendere, studiare e progettare i moderni dispositivi nanometrici. Di pari passo, l'evoluzione dell'elettronica e dell'informatica ha permesso di aumentare la capacità di calcolo dei computer, mettendo a disposizione degli scienziati calcolatori più potenti in grado di risolvere problemi sempre più complessi.

Allo stesso tempo, occorre evidenziare che anche le nanotecnologie hanno permesso una rapida evoluzione della matematica applicata. Infatti, quest'ultima si evolve e si sviluppa dallo studio dei problemi della vita reale. Così come la geometria si sviluppò nell'antico Egitto per ripristinare i confini dei terreni cancellati dalle piene del Nilo, analogamente lo studio di nuovi problemi nel campo delle nanotecnologie ha fornito ispirazione per lo sviluppo di modelli matematici più raffinati ed algoritmi numerici più efficienti.

Le nanotecnologie sono un settore multidisciplinare in cui il progresso di differenti campi della scienza è avvenuto parallelamente. E' pertanto difficile ed utopistico separare i contributi della matematica da quelli delle altre scienze, proprio perché strettamente interconnesse. Di conseguenza, si rende necessario un "know-how" più trasversale, dove la conoscenza della matematica è uno dei requisiti fondamentali per affrontare questo studio.

### 1.1.7 Ringraziamenti

A conclusione di questo breve articolo, vorrei ringraziare Mattia Bacca, Claudio Bonati, Donatella Capelli, Maria Beatrice Casu, Maria Napoli, Daniele Ortu, Eliana Pintus e Giampaolo Pintus, che con i loro consigli e suggerimenti hanno contribuito a migliorarne la forma ed il contenuto del presente lavoro. Ogni errore ed imprecisione è da attribuire all'autore.

### Riferimenti bibliografici

1. Nanoscopic scale, <https://en.wikipedia.org/wiki/Nanoscope>
2. Trascrizione della lezione di R. Feynman <http://www.zyvex.com/nanotech/feynman.html>
3. Trascrizione della lezione di R. Feynman in lingua italiana, <http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2016/04/16/theres-plenty-of-room-at-the-bottom-di-richard-feynman-traduzione-in-italiano/>
4. I. Ferain, C. A. Colinge, and J.-P. Colinge, "Multigate transistors as the future of classical metal-oxide-semiconductor field-effect transistors," *Nature*, vol. 479, pp. 310–316, Nov. 2011.
5. G. E. Moore, "Cramming More Components onto Integrated Circuits," *Electronics*, pp. 114–117, 19 Apr. 1965.
6. T. L. Friedman, "Moore's Law Turns 50," *New York Times*, 13 Maggio 2015 <http://www.nytimes.com/2015/05/13/opinion/thomas-friedman-moores-law-turns-50.html>
7. La fine della legge di Moore, <http://www.ilpost.it/2016/02/15/la-fine-della-legge-di-moore/>
8. Mitchell Waldrop, "More than Moore," *Nature*, vol. 530, pp.145-147, 11 Feb. 2016
9. T. A. Hilder and J. M. Hill "Modeling the Loading and Unloading of Drugs into Nanotubes," *Small*, vol. 5, no. 3, pp. 300–308, 6 Febbraio 2009.
10. G. Pastorin, "Crucial Functionalizations of Carbon Nanotubes for Improved Drug Delivery: A Valuable Option?" *Pharmaceutical Research*, vol. 26, no. 4, pp. 746–769, 14 Gennaio 2009.

11. A. A. Bhirde, V. Patel, J. Gavard, G. Zhang, A. A. Sousa, A. Masedunskas, R. D. Leapman, R. Weigert, J. S. Gutkind, J. F. Rusling, "Targeted Killing of Cancer Cells in Vivo and in Vitro with EGF-Directed Carbon Nanotube-Based Drug Delivery," ACS Nano, vol. 3, no. 2, pp. 307–316, 24 Febbrauaio 2009.
12. V. Kaajakari, Practical MEMS: Design of microsystems, accelerometers, gyroscopes, RF MEMS, optical MEMS, and microfluidic systems, Small Gear Publishing, 2008.
13. T.R. Hsu, MEMS and Microsystems: Design, Manufacture, and Nanoscale Engineering, Wiley, 2008.
14. T. Sewell and M. Waldron, "Dermal denticles of great white shark," Electron Microscope Unit, University of Cape Town, Smithsonian Museum of Natural History, <http://ocean.si.edu/ocean-photos/biomimicry-shark-denticles>
15. V. Stenzel, Y. Wilke, and W. Hage, "Drag-reducing paints for the reduction of fuel consumption in aviation and shipping," Progress in organic coatings, vol. 70, no. 4, pp. 224-229, Aprile 2011.
16. Like a shark in the water, <https://www.lufthansa-technik.com/en/multifunctional-coating>
17. Le Scienze: Una vernice per aerei "a pelle di squalo" <http://www.lescienze.it/news/2010/05/21/news/una-vernice-per-aerei-a-pelle-di-squalo-555976/>
18. K. Autumn, Y. A. Liang, S. T. Hsieh, W. Zesch, W. P. Chan, T. W. Kenny, R. Fearing and R. J. Full, "Adhesive force of a single gecko foot-hair," Nature, vol. 405, pp. 681-685, 2000.
19. S. Gorb, Attachment devices of insect cuticle, Springer Science and Business Media, 2001.
20. G. Huber, H. Mantz, R. Spolenak, K. Mecke, K. Jacobs, S. N. Gorb, and E. Arzt, "Evidence for capillarity contributions to gecko adhesion from single spatula nanomechanical measurements," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 102, no. 45, pp. 16293-16296, 2005.
21. N. M. Pugno, and E. Lepore, "Observation of optimal gecko's adhesion on nanorough surfaces," Biosystems, vol. 94, no. 3, 218-222, 2008.
22. D. D. Agonafer, E. Chainani, M. E. Oruc, K. S. Lee, M. A. Shannon, "Study of Insulating Properties of Alkanethiol Self-Assembled Monolayers Formed Under Prolonged Incubation Using Electrochemical Impedance Spectroscopy," Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine, vol. 3, pp. 031006, 2013.
23. M. F. Crommie, C. P. Lutz, D.M. Eigler, "Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface," Science, vol. 262, pp. 218–220, 1993.
24. M. F. Crommie, C. P. Lutz, D. M. Eigler, and E. J. Heller, "Waves on a metal surface and quantum corrals," Surface Review and Letters, vol. 2, no. 1, pp. 127-137, Febbraio 1995.
25. D. M. Eigler and K. E. Schweizer, "Positioning single atoms with a scanning tunnelling microscope," Nature, vol. 344, pp. 524-526, 1990.
26. M. J. Madou, Fundamentals of Microfabrication and Nanotechnology, Volume III: From MEMS to Bio-MEMS and Bio-NEMS: Manufacturing Techniques and Applications, CRC Press, 2011
27. S. A. Campbell, Fabrication Engineering at the Micro- and Nanoscale, Oxford Univ. Press, 2008.
28. G. L. Hornyak, J. J. Moore, H.F. Tibbals, and J. Dutta, Fundamentals of Nanotechnology, CRC Press, 2008.
29. Abstruse Goose, "This is how scientist see the world," <http://abstrusegoose.com/275>
30. C. Zhang, D. Liang, G. Kurczveil, J. E. Bowers, and R. G. Beausoleil, "Thermal management of hybrid silicon ring lasers for high temperature operation," IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 21, no. 6, pp. 385-391, 2015.
31. L. Wen, J. C. Weaver, G. V. Lauder, "Biomimetic shark skin: design, fabrication and hydrodynamic function," Journal of Experimental Biology, vol. 217, pp. 1656-1666, 2014.
32. Structure of diamond, <http://math.ucr.edu/home/baez/week262.html>
33. Einstein and quantum solids, <http://mappingignorance.org/2015/12/17/einstein-and-quantum-solids/>
34. A. Quarteroni, Modellistica numerica per problemi differenziali, 5a Edizione, Springer, 2012.
35. Platinum Nano-Wire by Peter Heard, <https://www.fei.com/image-gallery/platinum-nano-wire/>
36. G. Rodriguez, Algoritmi Numerici, Pitagora Editrice, 2008.
37. COMSOL Multiphysics, <https://www.comsol.com/>
38. ANSYS, <http://www.ansys.com/>

**MODELLISTICA MATEMATICA  
PER IL SISTEMA CARDIOVASCOLARE**

Alfio Quarteroni<sup>1</sup>

**ABSTRACT**

**Sunto.** In questa breve nota accenneremo al ruolo della modellistica matematica e del calcolo scientifico nella simulazione del flusso sanguigno nel sistema cardiocircolatorio umano, alla loro rilevanza come strumenti di indagine e supporto alle decisioni. Citeremo alcuni risultati conseguiti e le prospettive che si aprono per la chirurgia predittiva

**Introduzione. Modelli per la Progettazione e la Simulazione.**

La modellistica matematica sta gradualmente ma inesorabilmente affacciandosi in svariatisimi contesti per proporsi come strumento ausiliare (allorquando non esclusivo) di indagine sia qualitativa sia quantitativa.

Da svariati decenni i modelli matematici vengono usati nell'industria aeronautica, automobilistica, elettronica, chimica o manifatturiera per la progettazione di prodotti e tecnologie innovative. Le tecnologie industriali diventano sempre più complesse, mentre i cicli di innovazione tendono ad accorciarsi. I modelli matematici, se accuratamente sviluppati, offrono in effetti nuove possibilità per dominare la complessità ed esplorare nuove soluzioni.

Tuttavia si adottano modelli matematici anche per prevedere e simulare processi naturali. È a tutti evidente il ruolo che essi hanno assunto nel campo delle previsioni meteorologiche su scala planetaria, regionale o locale; ma si applicano anche per l'analisi del rischio sismico, la valutazione d'impatto di inondazioni o esondazioni, la simulazione di processi di inquinamento atmosferico o idrico.

In effetti, l'uso dei modelli si è alquanto diversificato, ed oggi si usano per descrivere processi economici e finanziari (ad esempio per l'analisi di rischio dei derivati finanziari), per identificare strutture matematiche in una certa area territoriale ed aiutare a pianificare interventi architettonici, così come per aiutare a migliorare le prestazioni nello sport da competizione.

---

<sup>1</sup> MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, 20133 Milano; e CMCS (Chair of Modeling and Scientific Computing), EPFL, CH1015 Lausanne. Email: alfio.quarteroni@epfl.ch

## 1. Modelli per le Scienze della Vita

Dopo l'innovazione tecnologica, l'ambiente, l'economia e lo sport, i modelli stanno iniziando a svilupparsi in numerosi ambiti delle scienze della vita, come per un' ideale migrazione fra settori a forte componente tecnico-scientifica ad altri in cui l'elemento umano assume il ruolo preponderante.

La modellistica matematica a livello cellulare e sistemico (ovvero di organi, quale il cuore, e sistemi, quali quello circolatorio, respiratorio, nervoso, scheletrico..) è destinata a giocare un ruolo primario nello svelare il modo in cui l'informazione contenuta nel genoma è stata predisposta al fine di creare sistemi viventi. Essa richiederà lo sviluppo di modelli integrati:

- - in senso orizzontale, ovvero basati sull'accoppiamento di differenti processi fisici o biologici alla stessa scala. La comprensione della natura accoppiata di questi processi richiede la messa a punto di diversi modelli matematici in grado di trattare i singoli processi;
- - in senso verticale, in quanto si debbono usare dati sperimentali e modelli matematici in grado di trattare scale spaziali dal livello molecolare (inferiori al milionesimo di millimetro) a quello cellulare e tissutale (dal decimillesimo di millimetro sino al millimetro) sino alla scala dei vari organi e dell'intero corpo (fra il millimetro e il decimetro).

Nel fornire una comprensione quantitativa del comportamento di un intero organo in termini di funzioni sub-cellulari, i modelli potrebbero stabilire un legame fra struttura molecolare e comportamenti clinicamente osservabili, aiutando in questo modo nell'interpretazione di immagini ottenute da risonanza magnetica, ultrasuoni o mappe di potenziali elettrici.

L'analisi quantitativa dell'interazione elettrica, meccanica e biochimica della funzione cardiaca, possibile se si dispone di modelli matematici integrati, può ad esempio spiegare il comportamento di una nuova medicina su una membrana che funziona da recettore.

## 2. La Modellazione del Sistema Cardiovascolare

*L'esperienza dei nostri giorni: i modelli e le simulazioni al computer.* Durante gli anni Settanta, gli esperimenti *in vitro* o quelli su animali rappresentavano la modalità principale degli studi cardiovascolari. Recentemente, il progredire della fluidodinamica computazionale (ovvero la risoluzione al computer delle complesse equazioni che governano la dinamica dei fluidi), così come l'aumento impressionante della potenza dei calcolatori elettronici e

degli algoritmi, hanno prodotto significativi passi in avanti che promettono di rivoluzionare la ricerca vascolare.

Grandezze fisiche come lo *shear stress* (ovvero lo sforzo tangente) sulla membrana endoteliale, assai problematiche da misurarsi in vitro, possono essere calcolate su geometrie reali ottenute con algoritmi di ricostruzione tridimensionale grazie al supporto delle moderne e non invasive tecnologie di acquisizione dei dati (ad esempio, la risonanza magnetica nucleare, l'angiografia digitale, la tomografia computerizzata, l'anemometria doppler).

Scorrendo, il sangue interagisce meccanicamente con le pareti dei vasi, dando origine a complessi problemi di interazione fluido-strutturale. In effetti, il fronte dell'onda pressoria trasferisce energia meccanica alle pareti che si dilatano; tale energia viene restituita al flusso sanguigno nella fase di compressione dei vasi stessi.

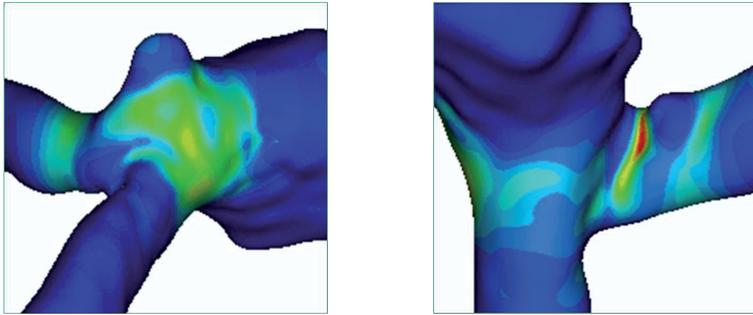


Fig.1: Simulazione dello shear stress sulla superficie dell'arteria polmonare di un bimbo affetto da una malattia cardiaca congenita.

La simulazione matematica dell'interazione fra fluido e parete arteriosa richiede algoritmi che descrivano sia il trasferimento di energia a livello macroscopico tra il fluido (modellato tipicamente dalle equazioni di Navier-Stokes) e la struttura (modellata con le equazioni della meccanica dei solidi), sia l'influenza a livello microscopico dello shear stress sull'orientamento, la deformazione e il danneggiamento delle cellule endoteliali. Nel contempo, le equazioni del flusso devono essere abbinate a modelli appropriati per descrivere il trasporto, la diffusione e l'assorbimento delle componenti chimiche in gioco (ad esempio ossigeno, lipidi, farmaci) nei diversi strati che compongono la parete delle arterie (intima, media e avventizia). Simulazioni numeriche di questo tipo possono aiutare a chiarire modificazioni biochimiche prodotte da alterazioni nel campo di flusso, dovute ad esempio alla presenza di una stenosi.

Nel sistema cardiovascolare, si riscontrano condizioni di flusso separato e/o

generazione di moti circolatori secondari a valle di biforcazioni (per esempio quella carotidea nei suoi rami interno ed esterno, in presenza di vasi a grande curvatura (come ad esempio l'arco aortico o le coronarie), a valle di regioni con restrizioni (ad esempio dovute alla presenza di stenosi); zone con inversione del flusso (da regioni distali a prossimali); aree a shear stress basso o temporalmente oscillante.

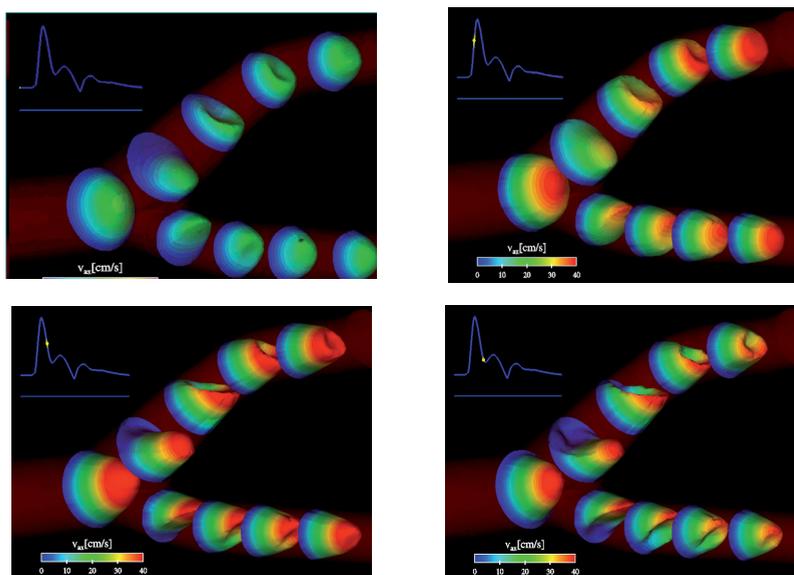


Fig. 2: Simulazione del campo di velocità a valle della biforcazione carotidea per quattro diversi istanti della fase sistolica-diastolica.

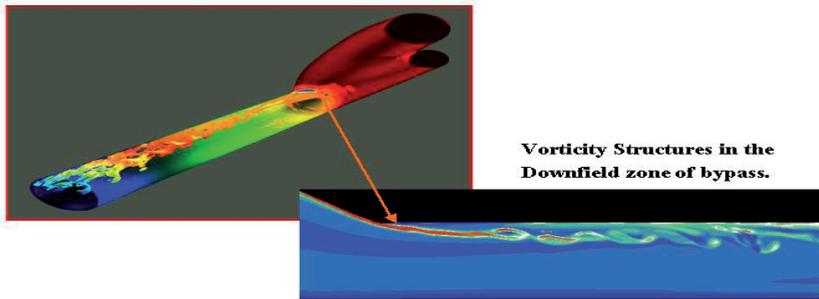
Queste circostanze sono oggi riconosciute quali potenziali fattori nello sviluppo di patologie arteriose. Una comprensione dettagliata del cambiamento emodinamico locale, degli effetti della modificazione delle pareti vascolari sullo schema del flusso, del graduale adattamento nel medio-lungo periodo del sistema globale a seguito di interventi chirurgici, è oggi non più impossibile grazie all'uso di raffinate simulazioni al computer e potrebbe rilevarsi estremamente utile nella fase preliminare alla realizzazione di un trattamento terapeutico e/o chirurgico.

**Modelli per la chirurgia vascolare.** Simulare il flusso in un bypass coronarico, in particolare la ricircolazione che si determina a valle del re-innesto nella coronaria, può contribuire alla comprensione degli effetti della morfologia delle arterie sul flusso e quindi all'evoluzione post-chirurgica.

Ogni anno l'8% dei pazienti che si sottopongono all'intervento per l'impianto di un bypass rischiano la ri-occlusione (dopo 10 anni l'80% dei bypass im-

piantati devono essere sostituiti). La ripetizione di procedure di intervento chirurgico comporta un alto rischio di complicazioni: per questo molti aspetti devono essere compresi e controllati per evitare complicazioni e fallimenti post-operatori causati da ricircolazioni, flussi anomali e perturbati, ristenosi, iperplasia, etc.

### Vorticity after bypass implanting



Acknowledgments F.Loeh, S. Lee, F.Fischer.  
University Illinois, Chicago and Argonne National laboratory.

Fig.3: Simulazione numerica della vorticità creata a valle di un by-pass coronarico.

Attualmente sono disponibili varie procedure di innesto e varie tipologie di bypass; la simulazione numerica applicata a strumenti matematici di ottimizzazione (individuate opportune grandezze da osservare e ottimizzare) favorisce la comprensione di fenomeni molto complessi all'interno del bypass e quindi una potenziale prevenzione di complicazioni, suggerendo configurazioni ottimizzate a vari livelli: dalla geometria locale (soprattutto nelle zone di innesto, dove si possono studiare varie forme a cuffia (Taylor, Miller)) alle grandezze che concorrono a costituire tutta la struttura del bypass (angolo di innesto, rapporto tra il diametro del bypass e dell'arteria nella zona di innesto, distanza tra il nuovo innesto e la stenosi, etc.).

In Fig. 4 si mostra come la teoria del controllo ottimale di forma può aiutare a “progettare” un by-pass che minimizzi la vorticità prodotta a valle del reinnesto nella coronaria. Analogamente, lo studio degli effetti delle protesi vascolari e degli impianti di valvole artificiali sull'emodinamica locale e globale può avanzare grazie a simulazioni sufficientemente accurate del campo di flusso del sangue.

Il trattamento degli stadi avanzati delle patologie coronariche richiede nella maggior parte dei casi un intervento chirurgico del tipo bypass, angioplastica

o l'impianto di uno stent. Lo stent è una micro-struttura costituita da filamenti metallici intrecciati e opportunamente sagomati. Esso viene collocato ed espanso in corrispondenza delle placche aterosclerotiche fino al diametro originale dell'arteria, al fine di ripristinare una sufficiente sezione del lume dell'arteria e permettere il regolare flusso del sangue.

Generalmente questi dispositivi medici vengono lasciati permanentemente nel sito dove sono stati impiantati, tipicamente le arterie coronarie. L'impianto di uno stent e l'angioplastica sono operazioni molto meno invasive e gravose dell'operazione chirurgica di bypass di una coronaria ostruita, oltre ad essere più convenienti anche dal punto di vista economico. Per queste ragioni, gli interventi per mezzo di stent o di angioplastica sono in ampia crescita. Dati estratti da Heart Disease and Stroke, Statistics 2004 dell'American Heart Association confermano che dal 1979 al 2001 il numero di questi interventi negli Stati Uniti è triplicato e nel solo 2001 ne sono stati eseguiti circa 1.208.000.

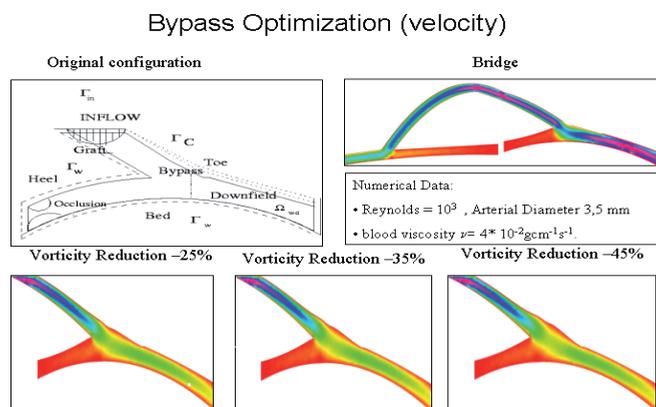


Fig. 4: Processo di ottimizzazione della forma di un by-pass coronarico.

Gli stent cardiovascolari devono soddisfare numerosi requisiti talvolta contrastanti. Ad esempio devono essere estremamente flessibili lungo il loro asse longitudinale per poter essere spinti attraverso arterie di diametro ridotto e di forma tortuosa; devono essere sufficientemente visibili con tecniche radiologiche per essere guidati dall'esterno e posizionati, devono essere facilmente espandibili fino al diametro originale dell'arteria che devono mantenere dilatata; resistere alle sollecitazioni meccaniche imposte da questa; infine devono risultare poco invasivi rispetto al flusso sanguigno e minimizzare i fenomeni trombogenici.

Lo studio dell'impatto di uno stent sul flusso sanguigno e sulla pressione arteriosa nella regione dell'impianto e sull'intero sistema cardiovascolare è un

problema estremamente complesso in cui la modellistica matematica può venire in aiuto. L'impianto di uno stent in un'arteria modifica infatti le proprietà elastiche e di rigidità della parete vascolare. Per questa ragione il tratto di arteria in considerazione reagirà, dopo l'impianto, in modo completamente diverso rispetto alla propagazione delle onde di pressione generate dal battito cardiaco. In particolare, l'aumento di rigidità fa sì che parte dell'energia che si propaga come onda di pressione venga riflessa nella zona prossimale ed accelerata in quella distale, generando in alcuni casi una significativa perturbazione sui carichi pressori (si veda in figura 5<sup>a</sup> la perturbazione indotta da uno stent addominale aortico in prossimità della biforcazione carotidea).

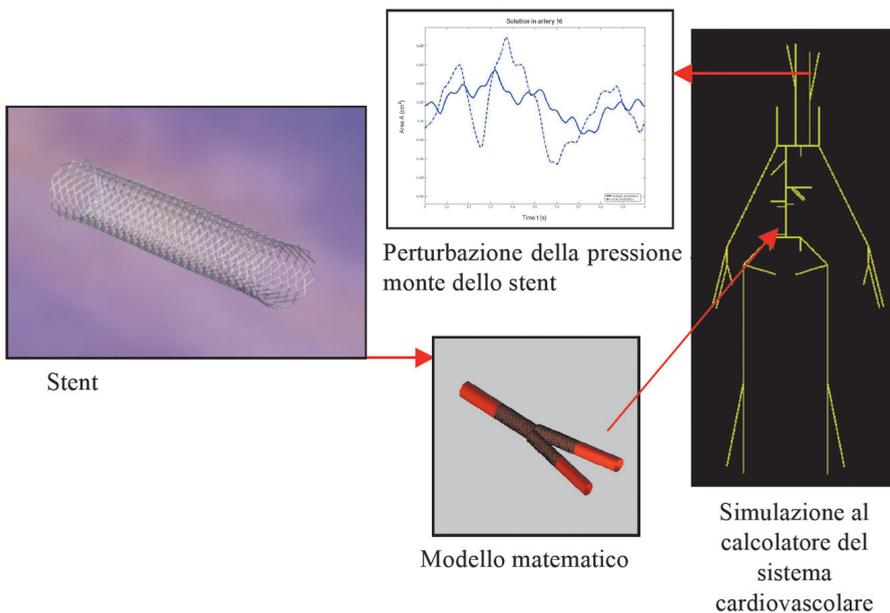


Fig. 5(a): Simulazione numerica della perturbazione della pressione arteriosa in prossimità della biforcazione carotidea dovuta all'impianto di uno stent nella biforcazione iliaca.

La seconda fonte di perturbazione introdotta dagli stent è dovuta alla loro interazione con le cellule della parete vascolare con cui sono a contatto. Metalli come ferro, nichel etc., di cui sono composti alcune famiglie di stent, possono interagire con le cellule dell'intima e della media (gli strati che costituiscono la parete vascolare) causando una reazione infiammatoria che può portare ad una proliferazione incontrollata delle cellule muscolari lisce contenute nella media, riducendo il lume vascolare. Per contrastare questo fenomeno la ricerca è molto attiva nello sviluppo degli stent a rilascio di farmaco, rivestiti da un microstrato di materiale capace di immagazzinare e rilasciare lentamente

un farmaco. I principali elementi di interesse sono la scelta del farmaco ed il design di una opportuna matrice capace di immagazzinare e rilasciare il farmaco scelto per lo stent. Inoltre, lo sviluppo di nuove microtecnologie consente di forare opportunamente i filamenti dello stent e di riempire i fori con strati di materiali o sostanze diverse. Questo apre la strada a innumerevoli possibilità per progettare uno stent con un profilo di rilascio predeterminato nel tempo di uno o più farmaci che possono interagire con la parete vascolare o con la superficie di contatto tra lo stent ed il sangue. A tal fine, la modellistica matematica e la simulazione al computer permettono di valutare il comportamento di diverse configurazioni (figura 5), rapidamente e con costi estremamente ridotti rispetto all'indagine sperimentale, mettendo in evidenza quali siano le soluzioni tecnologiche più efficaci. Un ulteriore sviluppo in questa direzione è dato dall'applicazione delle tecniche di controllo ottimale. In questa cornice, un obiettivo non ancora raggiunto ma alla portata delle tecnologie progettuali e produttive è quello di concepire una famiglia di stent a partire da un comune design geometrico diversificati per tipo di farmaco e profilo di rilascio, al fine di adattarsi in modo ottimale alle diverse patologie delle coronarie

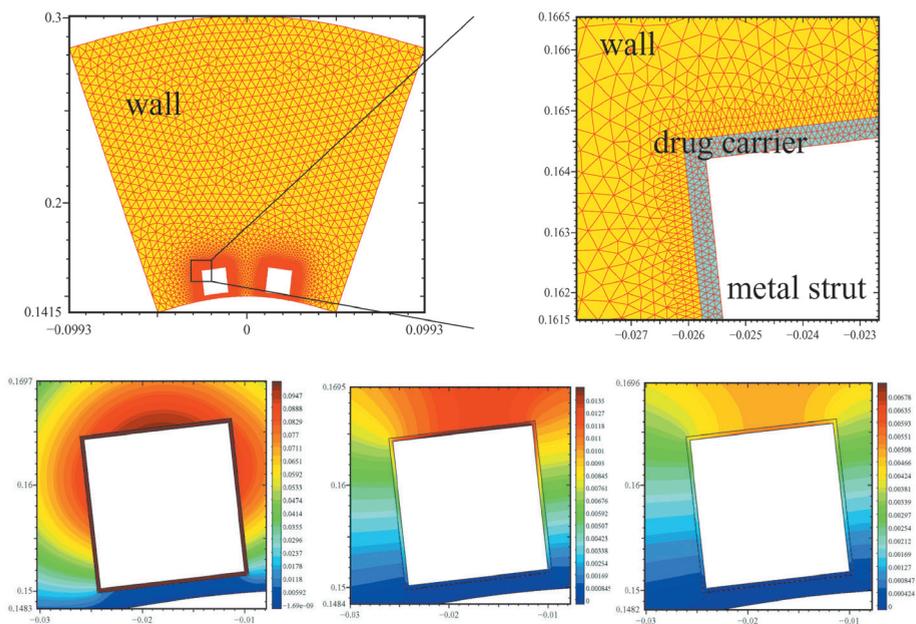


Fig. 5(b): Simulazione numerica del rilascio di farmaco da parte di uno stent.  
 Rappresentazione del modello matematico al computer (alto).  
 Concentrazione nella parete vascolare del farmaco rilasciato (basso),  
 1 ora, 12 ore 1e 24 ore dopo l'impianto.

***Modelli matematici per la circolazione polmonare e sistemica in individui con difetti cardiaci congeniti.*** Una caratteristica peculiare dei difetti cardiaci congeniti è l'estrema varietà della morfologia di ciascun difetto. L'immediata conseguenza di ciò è l'estesa variabilità delle caratteristiche fisiopatologiche, essendo l'emodinamica principalmente influenzata dalla morfologia intracardiaca di ciascun individuo.

Si possono evidenziare diversi fattori responsabili di una vasta gamma di situazioni cliniche. Da un lato, la relazione tra l'età e la risposta cardiaca a sollecitazioni in termini di pressione o flusso sanguigno nel caso di malformazioni cardiache. D'altro lato, la dipendenza dell'emodinamica da numerose variabili tra loro correlate, come la crescita e lo sviluppo del sistema di arterie polmonari, l'equilibrio tra la resistenza del circolo sistemico e quello polmonare, l'influenza di fattori ematologici e metabolici.

Alla luce di queste osservazioni, le procedure di diagnosi e l'intervento terapeutico devono tenere conto delle caratteristiche individuali di ciascun paziente. Contemporaneamente a ciò, la medicina basata sull'evidenza sta suscitando sempre più interesse, spinta dalle richieste pressanti degli enti sanitari e dalla crescente conoscenza dei pazienti e delle loro famiglie in termini di medicina, che determina naturalmente una crescita delle loro aspettative. Il risultato di queste dinamiche è la tendenza alla razionalizzazione ed allo studio quantitativo di tutti i parametri che influenzano il trattamento delle malattie cardiache congenite.

Per queste ragioni, la ricerca internazionale si è concentrata negli ultimissimi anni a mettere a punto modelli matematici e simulazioni al computer al fine di migliorare gli strumenti a disposizione per capire le diverse situazioni fisiopatologiche, misurare l'efficacia delle terapie proposte e affinare l'analisi del rischio paziente/malattia.

Il nostro approccio consiste nell'approntare un modello matematico per la simulazione di un cuore sano accoppiato alla circolazione sistemica e polmonare, nel quale sia possibile modificare i vari parametri (come la pressione nei ventricoli e negli atri e la resistenza del circolo polmonare e sistemico) in funzione dell'età e del peso del paziente.

Una volta validato questo modello per un individuo sano, vi si introduce una variante che simuli un difetto ventricolare (ad esempio del setto ventricolare) al fine di valutare i cambiamenti che esso induce sull'emodinamica del cuore e della circolazione polmonare e sistemica.

Nel caso questo specifico studio si dimostri efficace e fornisca simulazioni quantitativamente attendibili, il modello sviluppato potrà essere applicato per

analizzare diverse patologie (come la presenza di un'ostruzione della circolazione sistemica o polmonare), come anche per sviluppare nuove procedure di intervento per curare il difetto considerato.

Un esempio è illustrato in Fig 6 in cui si mostrano due modalità in cui uno shunt (cioè una connessione tra due vasi) può essere realizzato nella circolazione polmonare di neonati con malformazioni cardiache. In questo caso, le simulazioni numeriche possono aiutare il chirurgo a comprendere gli effetti di diverse soluzioni sulla circolazione sanguigna e fornire una guida nella selezione della procedura più indicata per un dato paziente.

Procedure di shunt differenti e geometrie differenti, per esempio, possono essere simulate prima di un intervento chirurgico, e dati quantitativi quali pressione e flusso in luoghi specifici possono indicare quale sia la configurazione ottimale. Nel caso illustrato in figura 6, basato su dati relativi ad un neonato, una classica procedura di Norwood con un diametro dello shunt di 3mm garantirebbe un'intensità del flusso di 0.67 e 0.5 l/min rispettivamente alle arterie polmonare destra e coronaria principale. La procedura di Blalock-Taussig modificata, con lo stesso diametro di shunt, risulterebbe in intensità di 0.45 e 0.54 l/min rispettivamente. In un tale ambito di "chirurgia virtuale", il risultato di trattamenti alternativi per un paziente particolare può essere previsto dalle simulazioni. Questo approccio numerico è un aspetto di un nuovo paradigma della pratica clinica conosciuto come "medicina predittiva".

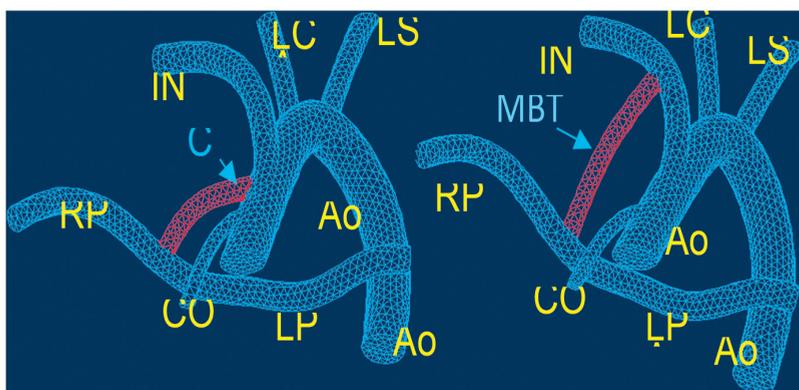


Fig.6: Due diverse modalità di realizzazione di uno shunt: central Norwood (C, a sinistra) e Modified Blalock-Taussig (MBT, a destra).

**Modelli per simulare condizioni estreme.** Una volta sviluppati, i modelli per la simulazione del sistema cardiovascolare possono essere usati per studiare condizioni di flusso in contesti non convenzionali.

Fra i tanti esempi che si possono citare, mi soffermerò su un paio che mi sembrano assai significativi ad illustrare il potenziale offerto dalla modellistica matematica in questo ambito.

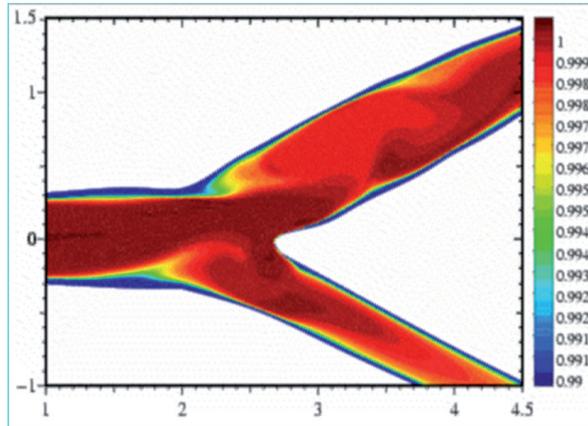


Fig 7: Simulazione del tasso di concentrazione di ossigeno nella biforcazione carotide

Da un anno la NASA ha lanciato un programma scientifico ambizioso, detto “*Digital Astronaut*”, che mira a costruire un modello biomeccanico per valutare la risposta del sistema cardiocircolatorio dell’astronauta in regime prolungato di gravità ridotta. L’obiettivo è quello di trovare contromisure durante la missione e rimedi per favorire il ritorno a condizioni di normalità a missione finita.

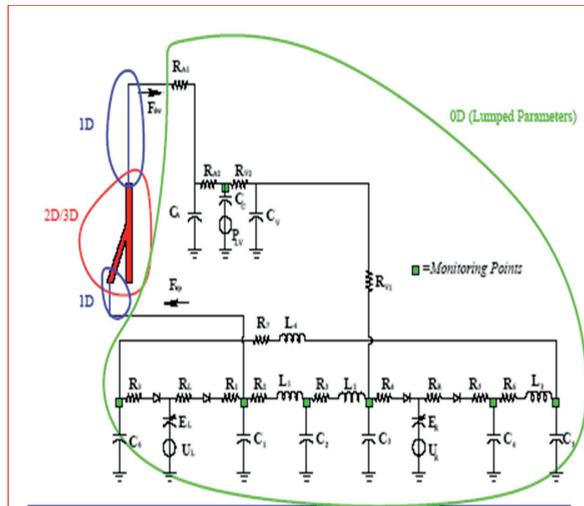


Fig 8: Un modello multiscala locale-globale per la simulazione del flusso sanguigno in un by-pass coronarico.

Ma diventa particolarmente importante la capacità del modello di simulare l'auto-regolazione e il controllo che l'organismo umano sa attivare per contrastare l'alterazione delle condizioni esterne: ad esempio le caratteristiche elastiche dei vasi sanguigni in assenza di gravità cambiano rispetto a quelle standard, in quanto la muscolatura liscia che li circonda è costantemente sotto controllo di stimoli nervosi che reagiscono a qualsiasi variazione biochimica o meccanica.

Fenomeni di adattamento e regolazione sono una caratteristica peculiare di qualsiasi sistema biologico: spesso sono centinaia i meccanismi di *feed-back* che agiscono sullo stato di cellule e tessuti. Tali processi sono codificati tramite complesse reazioni enzimatiche, e, soprattutto nel caso di organismi complessi come l'uomo, risultano particolarmente difficili da descrivere in maniera puramente fenomenologica e sperimentale. Per questo motivo, recentemente si assiste allo sviluppo della cosiddetta biologia computazionale: i processi biochimici a livello cellulare vengono sempre più spesso studiati oltre che in laboratorio al calcolatore, consentendo una indagine rapida e precisa. Numerosi sono i fenomeni che si riescono a simulare senza bisogno di apparecchiature dedicate: in particolare, citiamo la diffusione e il trasporto di specie chimiche nei tessuti, e l'insieme di reazioni accoppiate che caratterizzano l'attività metabolica cellulare. In questo campo, per avere risultati affidabili e validare i calcoli effettuati, il confronto con i dati sperimentali è comunque una tappa obbligata: soprattutto se si tiene conto che non esistono per la biochimica degli assiomi di validità "assoluta", come sono le leggi di Newton per la fluidodinamica. Le equazioni che vengono trattate dal calcolatore sono in tal caso a parametri stimati: tramite ad esempio algoritmi genetici, il modello che meglio rappresenta la realtà viene selezionato agendo opportunamente sui parametri incerti, consentendo di adattare le simulazioni a situazioni diversificate e intrinsecamente variabili, e di valutare l'errore commesso. Questo approccio può essere esteso allo studio del sistema cardiovascolare e dei tessuti alimentati da quest'ultimo in condizioni non-standard, come ad esempio sotto sforzo, o in caso di patologie, oppure ancora dopo l'introduzione di sostanze chimiche nella circolazione. Nei casi sopraelencati, si assiste ad una perturbazione metabolica (ad esempio carenza di ossigeno nei muscoli o nel cervello) che si ripercuote sulla meccanica dei vasi (le arterie e i capillari si dilatano o si restringono, la pressione sanguigna varia) in seguito a principi di auto-regolazione del corpo umano (un esempio ampiamente noto in fisiologia è il controllo per via simpatica e parasimpatica della pressione arteriosa). In questo ambito stiamo sviluppando una *modellistica dello sforzo* durante l'attività fisica. I modelli emodinamici precedentemente descritti sono adattati per tenere conto della dipendenza

di certi parametri fisiologici (si pensi alla resistenza idraulica dei capillari) dal metabolismo dei muscoli.

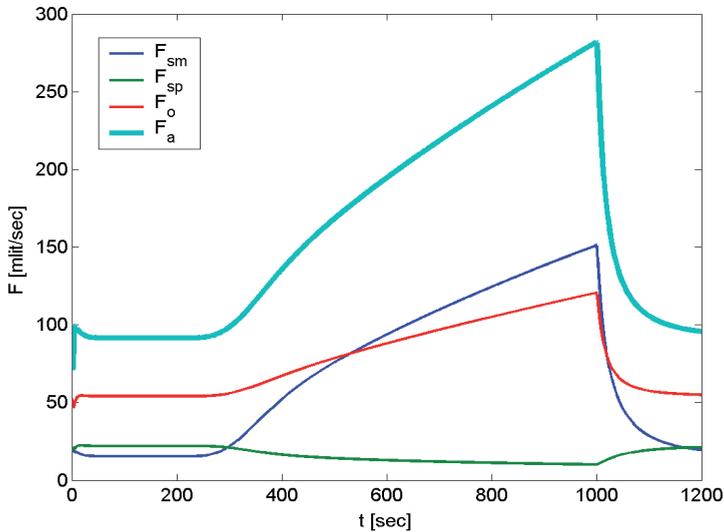


Fig. 9. Simulazione numerica del flusso di sangue rispettivamente verso muscoli ( $F_{sm}$ ), fegato ( $F_{sp}$ ), altri distretti ( $F_o$ ) e totale ( $F_a$ ) durante un esercizio incrementale.

In questo modo, è possibile prevedere contemporaneamente il carico di lavoro sul sistema cardiovascolare, come mostrato in Figura 9, e le variazioni di concentrazione di sostanze chimiche di interesse (ossigeno, acido lattico, glucosio sono alcuni esempi) che un esercizio o una patologia o ancora la somministrazione di un farmaco provoca nei tessuti e nel sangue. Incidentalmente, la modularità insita in questo tipo di approccio consente di mantenere compatibilità con la descrizione multi-scala del sistema cardiovascolare, dando spazio pertanto all'analisi dei fenomeni di interesse sia su scala globale mediante modelli ridotti, sia su scala locale con strumenti più raffinati e complessi.

### ***Ringraziamenti.***

*Le simulazioni numeriche presentate in questa nota sono state realizzate da J. Wynne (Fig. 1), M. Prosi (Fig. 2), P. Fischer (Fig. 3), G. Rozza (Fig. 4), P. Zunino (Fig. 5 e Fig. 7), G. Dubini e F. Migliavacca (Fig. 6), C. D'Angelo (Fig. 9).*

## Bibliografia

1. D.Ambrosi, A.Quarteroni and G.Rozza, Eds., **Modelling Physiological Flows**, Springer Series MS&A, Vol 5, 2011 (240p.)
2. L. Formaggia, A.Quarteroni and A. Veneziani, Eds., **Cardiovascular Mathematics. Modeling and Simulation of the Circulatory System**, Springer Series MS&A, Vol 1, 200
3. Laganà K., Dubini G., Migliavacca F., Pietrabissa R., Pennati G., Veneziani A, Quarteroni A., Multi-scale modelling as a tool to prescribe realistic boundary conditions for the study of surgical procedures, **Biorheology** 2002;39 (3-4), pp.359-364.
4. M.Prosi, P.Zunino, K.Perktold e A.Quarteroni, Mathematical and numerical models for transfer of low density lipoproteins through the arterial walls : a new methodology for the model set up with applications to the study of disturbed lumenal flow, to appear in **Journal of Biomechanics**, 2004.
5. A.Quarteroni, Modeling the Cardiovascular System – A Mathematical Adventure, in **SIAM News** 34 (5), 2001 (Part I) and **SIAM News** 34 (6), 2001 (Part II).
6. A. Quarteroni e L. Formaggia, Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System, Chapter 1 in **Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis Series**, pp. 1-101, P.G Ciarlet et J.L. Lions Eds., Elsevier, Amsterdam, 2004.
7. A.Quarteroni e G.Rozza, Optimal Control and Shape Optimization in Aorto-Coronaric Bypass Anas-tomoses, **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, Vol.13 (12), pp.1801-1823, 2003.
8. A.Quarteroni e F.Saleri, **Scientific Computing with MATLAB**, Springer-Verlag Heidelberg, 2003 (257 p.)
9. A.Quarteroni, A.Veneziani e P.Zunino, Mathematical and numerical modelling of solute dynamics in blood flow and arterial walls, **SIAM J. Numer. Anal.** Vol 39, No 5, (2001), pp. 1488-1511.
10. A. Quarteroni, L. Formaggia and A. Veneziani, Eds., **Complex Systems in Biomedicine**, Springer Italia, 2006 (292 p.)
11. A.Quarteroni, Ed., **Modeling the Heart and the Circulatory System**, Springer Series MS&A, Vol 14, 2015 (236 p.)

## LA MATEMATICA NELLA TEORIA DELLE DECISIONI

Sebastiano Seatzu e Paola Zuddas<sup>1</sup>

### Introduzione

La “Teoria delle Decisioni” (TD) nota, in campo accademico, come Ricerca Operativa (RO), è la disciplina che si occupa della risoluzione di complessi problemi decisionali, ossia della determinazione di una soluzione ottimale, tra le varie alternative possibili, nel rispetto di determinati obiettivi e vincoli.

Lo scopo primario della TD è la modellazione matematica dei problemi decisionali in studio allo scopo di poter ricorrere ai metodi della Programmazione Matematica per la loro risoluzione.

La Programmazione Matematica è quell’ampio e caratterizzante settore della Matematica che fornisce gli strumenti matematici in grado di supportare scientificamente le attività decisionali che si presentano nella gestione e coordinamento di molteplici attività, in presenza di risorse limitate. Attività che, tipicamente, si propongono di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo, nel rispetto delle limitatezza delle risorse e dei vincoli propri del sistema.

Con questa nota, ci si propone di attrarre l’attenzione degli insegnanti su questa materia che, anche se ancora poco conosciuta a livello scolastico, costituisce uno strumento prezioso, in particolare, per gli insegnanti di Matematica del ciclo scolastico superiore. Un riconoscimento autorevole di tale rilevanza è implicitamente contenuto in recenti indicazioni ministeriali nelle quali viene evidenziata l’esigenza di potenziare, nell’insegnamento della Matematica, le metodologie connesse con il cosiddetto “**Problem Solving**”, corredandole con una adeguata attività laboratoriale.

Questa esigenza è stata ribadita dal Consiglio Scientifico dell’Unione Matematica, secondo il quale i nostri studenti, in vari test internazionali (**OCSE**, **PISA**), hanno ottenuto giudizi molto negativi, sulla loro preparazione matematica, rispetto a quelli della maggior dei Paesi Europei, proprio per lo scarso peso che i nostri insegnanti attribuiscono a tali tipi di metodologie. Spesso i nostri studenti, pur conoscendo le proprietà e regole matematiche necessarie a risolvere i problemi proposti, non li sanno risolvere perché manca loro la capacità di formularli in termini matematici.

---

<sup>1</sup> Dipartimento di Matematica e Informatica, Cagliari. Email: seatzu@unica.it, zuddas@unica.it

Dopo alcune considerazioni sulle origini della RO, sulle ragioni del suo rapido sviluppo e della sua crescente pervasività, verranno presentati alcuni problemi tipo, volutamente semplici. A ciascuno di essi, seguendo l'approccio tipico della RO, verrà inizialmente associato il modello matematico che lo descrive compiutamente. Si passerà quindi alla illustrazione dell'idea che sta alla base dell'algoritmo che riconosce l'esistenza di una sola soluzione e ne consente il calcolo. Seguono alcuni esempi, di facile formulazione, che intervengono in vari settori applicativi.

La nota si conclude con alcune considerazioni finali, seguite da indicazioni bibliografiche e indirizzi di siti di potenziale interesse didattico.

**Origini della TD.** Pur non essendo facile, dal punto di vista storico, datare la nascita della TD, si può tranquillamente affermare che il primo fondamentale impulso alla sua nascita si è verificato durante la Seconda Guerra Mondiale. In tale periodo sono stati affrontati problemi decisionali per la cui risoluzione risultò necessario introdurre nuovi modelli matematici e tecniche di calcolo innovative, complessivamente capaci di fornire risposte affidabili in tempi brevi a problemi di eccezionale rilevanza pratica. Per far fronte a questa esigenza fu costituito in Gran Bretagna un gruppo di studio multi-disciplinare che doveva fornire risposte scientifiche a problemi del tipo: ottimizzare la localizzazione dei radar per sorvegliare nel modo migliore lo spazio aereo sul canale della Manica, in previsione di incursioni della aviazione tedesca.

Parallelamente, negli Stati Uniti, vennero costituiti gruppi di lavoro incaricati di trovare soluzioni scientificamente accettabili a problemi del tipo: ottimizzare il dimensionamento dei convogli di navi statunitensi, che dovevano attraversare l'Atlantico, in modo che risultasse minimo il rischio della loro intercettazione da parte dei sottomarini tedeschi.

Nello stesso periodo, anche in Russia vennero creati gruppi di lavoro per la risoluzione di fondamentali problemi militari del tipo: ottimizzare l'assegnazione, da parte del comando generale, delle truppe di rinforzo ai fronti, sulla base delle loro richieste e delle risorse realmente disponibili.

**Per approfondimenti:** J.F. Mc Closkey, *Operations Research in World War II*, Operations Research (1987).

Nel dopoguerra le metodologie sviluppate vennero orientate alla risoluzione di problematiche di tipo civile (ottimizzazione dei percorsi ferroviari, loca-

lizzazione ottimale di una rete di depositi industriali, mixing di carico nei servizi di autotrasporto, gestione dei grandi cantieri civili, ecc.).

L'introduzione dei computers ha comportato l'introduzione di un gran numero di tecniche risolutive e di algoritmi che hanno consentito di risolvere molti problemi che, fino ad allora, per la loro complessità di calcolo, erano considerati non risolvibili.

L'avvento dei Personal Computer ha determinato una ulteriore trasformazione del ruolo della RO. Esso ha infatti consentito la risoluzione di un numero crescente di problemi a "piccole" e "quotidiane" dimensioni, assegnando alla RO un carattere sempre più interdisciplinare, come schematizzato in Fig. 1.

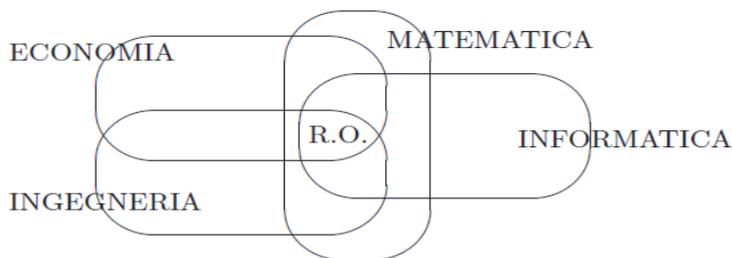


Figura 1: Interdisciplinarietà della Ricerca Operativa.

**Algoritmi della RO.** Il primo algoritmo effettivamente utilizzabile e affidabile, anche nella risoluzione di problemi di "grandi" dimensioni, è dovuto a Dantzig che, nel 1947, introdusse l'algoritmo del **simplexso**. Successivamente sono stati sviluppati numerosi altri algoritmi. Taluni di essi caratterizzati da maggiore efficienza computazionale, altri da una particolare efficacia nella risoluzione di problemi rappresentati da modelli con strutture particolari.

In questi ultimi anni, per problemi non trattabili con un algoritmo rigoroso, per motivi di dimensioni o di altre peculiarità, la RO ha spesso proposto l'adozione di algoritmi di tipo euristico definiti anche algoritmi "salvagente", in conseguenza del ruolo loro attribuito.

Si tratta di algoritmi che ricercano la soluzione del problema seguendo percorsi del tipo di quelli riportati nella Fig. 2.

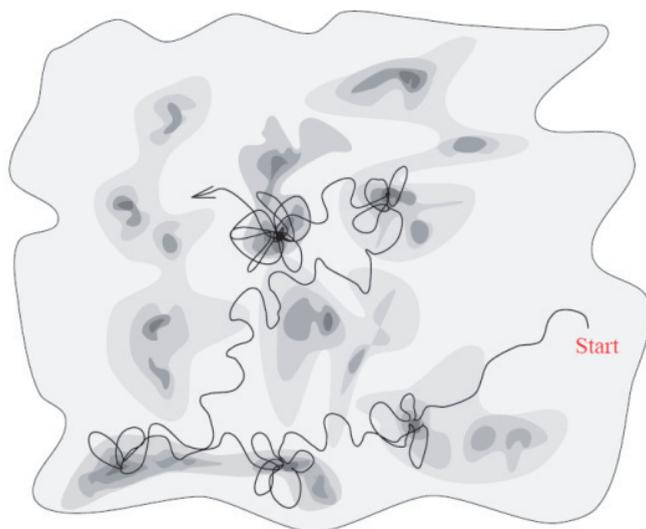


Figura 2: Ricerca euristica dell'ottimo partendo da un valore iniziale (start).

Le forti interconnessioni con l'Informatica hanno inoltre consentito di associare, all'efficienza degli algoritmi, l'utilizzo di strutture dati e interfacce grafiche dando origine ai Sistemi di Supporto alle Decisioni, spesso utilizzabili con procedure "amichevoli".

La RO rappresenta dunque un settore relativamente "giovane" della Matematica che, oltre ad aver avuto un grande sviluppo metodologico, è divenuta particolarmente pervasiva nei confronti di tante altre discipline.

Per dare un'idea della sua pervasività, elenchiamo di seguito alcuni tra i maggiori settori di intervento più noti della RO, che sono:

La programmazione e pianificazione della produzione; la assegnazione dei turni di lavoro e relativi orari; il controllo e gestione ottimale delle scorte; la gestione delle risorse umane; la gestione delle risorse sanitarie; la composizione delle diete alimentari; la ottimizzazione logistica dei trasporti, del traffico e dei parcheggi; la ottimizzazione delle reti di telecomunicazioni; la gestione ottimale delle risorse idriche; la finanza e la bio-informatica.

**Fasi operative.** E' interessante richiamare le fasi operative della RO, ossia la sequenza delle fasi tramite le quali essa fornisce il suo supporto alle decisioni.

- La prima, di cruciale importanza per le seguenti, riguarda la definizione e identificazione del problema. E' la fase nella quale le parti interessate definiscono i termini del problema, separando le componenti

rinunciabili da quelle irrinunciabili, individuando le approssimazioni consentite, ecc.;

- La seconda riguarda la costruzione del modello matematico. Modello che riesce a formalizzare il problema, assicurando un giusto livello di compromesso tra aderenza alla realtà fisica e possibilità risolutive;
- La terza riguarda l'individuazione (costruzione) della tecnica risolutiva più idonea, ovvero dell'algoritmo in grado di risolvere in modo ottimale (subottimale) il problema matematico formulato nella fase due;
- La quarta riguarda l'individuazione (costruzione) del software e dell'ambiente di calcolo più opportuno (o quantomeno accettabile) per implementare l'algoritmo;
- La quinta riguarda l'analisi e la validazione dei risultati ottenuti e la rappresentazione degli stessi nel modo più significativo.

Tutto il processo decisionale è caratterizzato da continui feed-back, fino al raggiungimento di risposte considerate soddisfacenti da tutti gli attori del processo.

Una rappresentazione grafica dell'intero processo è fornito dalla Figura 3.

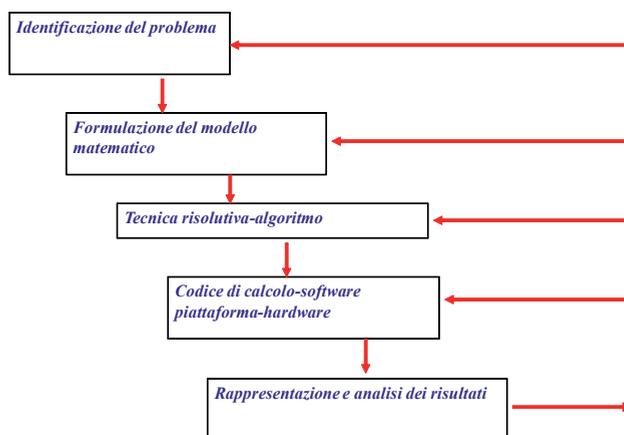


Figura 3: Il processo decisionale.

Per illustrare tale processo decisionale, iniziamo con un problema che, pur essendo molto “facile” da raccontare e non troppo complicato da modellare, diventa sempre più “difficile” da risolvere, al crescere della sua dimensione.

La ragione del nome del problema, knapsack (zaino), apparirà chiaro successivamente.

**Il problema dello “zaino”.** Uno studente di liceo, quando mancano 27 giorni agli scrutini, deve decidere, cosa può fare per salvare il salvabile sapendo che il Consiglio di Classe attribuisce un'importanza diversa alle singole materie. E' così pervenuto alla stima dei giorni di preparazione necessari per “rimediare”, riassunta nella Tab 1.

Materia	Giorni di preparazione	Importanza
italiano	10	20.00
latino	12	22.50
greco	15	25.00
inglese	9	15.00
fisica	7	12.50
scienze	6	12.50
storia	6	12.00
geografia	6	12.00
disegno	4	7.50

Tabella 1: Esempio studente

Il problema decisionale richiede la scelta delle materie da preparare in modo da massimizzarne la valutazione complessiva, avendo a disposizione un totale di 27 giorni.

Lo studente, adottando un puro approccio simulativo, potrebbe procedere per tentativi mediante strategie del tipo:

Scelta delle materie più “remunerative” fino a raggiungere il max di 27 gg disponibili.

Soluzione: latino + greco; tempo **27** giorni, **profitto 47,5**.

**(2)** Scelta delle materie che richiedono “meno tempo” di preparazione.

Soluzione: sc+st+geo+dis; tempo **22** giorni, **profitto 44,00**.

**(3) Scelta delle materie col minimo rapporto tempo/profitto.**

Soluzione: ita+sc+st+dis, tempo **26** giorni, **profitto 52.00**.

E così via, .....

L'approccio simulativo, prova-correggi-riprova non garantisce il raggiungimento della soluzione ottima e, qualora venga raggiunta, non ne riconosce l'ottimalità. Si è infatti certi del suo raggiungimento e del suo riconoscimento soltanto nel caso esso venga applicato in modo esaustivo. Tale approccio diventa pertanto inapplicabile in presenza di un numero di scelte molto alto, situazione quasi sempre presente nelle applicazioni.

Per avere la garanzia di trovare l'unica soluzione che può essere **certificata** come unica soluzione ottima, è necessario ricorrere alla RO. La sua applicazione, oltre a fornire la soluzione ottima, che è la seguente:

ita+fis+sc+dis, tempo **27gg**, profitto **52,50**

ne dimostra l'unicità.

Il termine "**knapsack**" deriva dalla formulazione seguente dello stesso tipo di problema:

Un escursionista deve decidere con che cosa riempire il suo **zaino** in modo che risulti massima "l'importanza complessiva" del carico, sapendo che il peso del carico complessivo non può superare un certo valore. La scelta riguarda vari oggetti quali borraccia d'acqua, spago, sacco a pelo, calze, carta igienica, coltello, ecc..

E' utile notare che questo tipo di problema si presenta in moltissimi settori e la sua soluzione efficiente determina spesso il successo della realizzazione del progetto stesso.

**Metodo grafico.** Al fine di introdurre l'idea che sta alla base del metodo più utilizzato per risolvere questo tipo di problemi, consideriamone uno risolvibile graficamente.

**(1)** Uno studente "modello", decide di tentare di guadagnare quanto gli occorre per poter fare una vacanza memorabile dopo l'esame di maturità. A tal fine decide di partecipare a due iniziative commerciali, ciascuna delle quali gli consente di scegliere un certo numero di Quote-Lavoro (QL), o parti di esse. Ogni quota dell'iniziativa 1 (I1) richiede un investimento di 1 euro, mentre l'iniziativa 2 (I2) non richiede alcun investimento. Lo studente, che dispone di 1 euro e di una media giornaliera di 7 ore di lavoro, pensa di investire il reddito proveniente dall'iniziativa 2 nell'iniziativa 1. La QL della I1 richiede

un impegno orario medio di 3 ore al giorno, mentre la QL della I2 richiede un impegno orario medio di 1 ora al giorno. Lo studente pensa di poter ottenere un guadagno di 20 euro a quota da I1 e 10 euro a quota da I2.

Per raggiungere il suo obiettivo che è, ovviamente, quello di massimizzare il guadagno giornaliero, deve decidere quante QL deve prendere per ciascuna iniziativa.

Indicate con  $x_1$  (numero di quote della I1), e con  $x_2$  (numero di quote della I2) le variabili decisionali del problema, deve risolvere il seguente problema:

massimizzare la funzione obiettivo  $z = 20 x_1 + 10 x_2$ ,

nella regione di ammissibilità, determinato dai vincoli

$$x_1 - x_2 < 1 \quad (\text{vincolo finanziario})$$

$$3 x_1 + x_2 < 7 \quad (\text{vincolo temporale})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{vincoli di non negatività}).$$

L'insieme dei vincoli determina l'insieme delle scelte ammissibili, tra le quali deve identificare quella ottima.

A tale scopo, con semplici considerazioni di geometria analitica, definiamo la "regione di ammissibilità" D, rappresentata nella Figura 4.

Per selezionare il punto "ottimale" procediamo per "tentativi".

Cominciamo con l'assegnare a z un valore (ad es. il valore 40), ovvero poniamo

$$z = 20 x_1 + 10 x_2 = 40.$$

Questa imposizione determina una retta che interseca la regione D mediante un segmento, i cui punti sono conseguentemente tutti ammissibili.

Se alla z assegniamo un valore maggiore di 40, ad es. 60, otteniamo  $z = 20 x_1 + 10 x_2 = 60$ . Questa scelta genera un altro segmento (intersezione della nuova retta con D) formato da altre infinite soluzioni ammissibili.

Poichè l'obiettivo è massimizzare z, trasliamo la retta il più possibile nella direzione di crescita del suo valore. La posizione obiettivo è rappresentata dalla retta  $z = 20 x_1 + 10 x_2 = 70$ , cui corrisponde l'unica soluzione X: ( $x_1=0, x_2=7$ ), come mostrato nella Fig. 4.

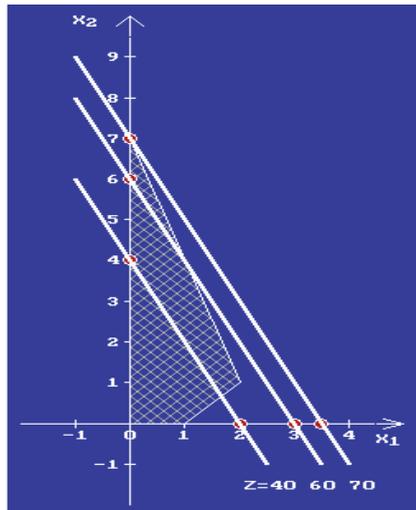


Figura 4: Ricerca grafica dell'ottimo

Appare chiaro dunque che la soluzione ottima corrisponde ad un vertice del poligono o ai punti di un suo lato nel caso di parallelismo con le rette  $z$ .

Aumentando il numero delle variabili decisionali, il dominio ammissibile non è più rappresentabile graficamente e la funzione obiettivo, per un suo valore prefissato, non rappresenta più una retta.

Nel caso di 3 variabili, il dominio diventa un semplice tridimensionale (poliedro) e la funzione obiettivo, per ogni fissato valore di  $z$ , un piano. Aumentando ancora il numero delle variabili il poliedro diventa un "simplex"  $n$ -dimensionale e la funzione obiettivo, per ogni prefissato valore, un iperpiano. La teoria dimostra comunque che, se il dominio ammissibile è limitato, la soluzione ottimale esiste. Qualora sia unica, come nell'esempio precedente, essa è data dal valore che la funzione obiettivo assume in un vertice (punto ottimale). Nel caso non lo sia, il valore ottimale viene assunto in ciascun punto di uno spigolo o di una faccia del simplex. È evidente che, in questo caso, pur essendo unico il valore ottimale della funzione obiettivo, i punti ottimali sono infiniti. Se il dominio non è limitato, la soluzione ottimale potrebbe non esistere: in caso di minimizzazione il valore di  $z$  potrebbe non avere una limitazione inferiore e, nel caso di massimizzazione, potrebbe non averne una superiore.

La strategia del simplex, come primo passo richiede la costruzione del dominio ammissibile e il calcolo della funzione obiettivo in un vertice. A quel punto, qualora il valore della funzione obiettivo nel punto non sia ottimale, si passa al calcolo in un altro vertice: quello tra tutti i vertici contigui

nel quale si realizza il massimo miglioramento. Il processo termina quando il metodo trova un vertice dal quale risulta sconveniente spostarsi. Quel vertice è ottimale e il metodo riconosce se esso è unico o se ve ne sono altri: nel caso di dominio non limitato è in grado di stabilire la eventuale non esistenza di una limitazione inferiore o superiore (non esistenza di una soluzione ottimale).

Presentiamo ora alcuni problemi tipo della RO che riteniamo di potenziale interesse per gli insegnanti di Matematica. Il primo di questi è risolvibile anche per via grafica, mentre gli altri, non risolvibili graficamente, lo sono in modo “amichevole”, utilizzando, ad esempio, il software “Lindo” che può essere scaricato da <http://www.lindo.com>.

**(1) Problema di gestione aziendale.** Un'azienda automobilistica produce due modelli di auto: uno a benzina B, che vende al prezzo di 10 mila €, e uno diesel che vende a 12 mila €. La costruzione di ogni auto è realizzata mediante due robot R1 e R2.

Per la produzione di un'auto B occorrono 2 ore di impiego di R1 e 2 ore di R2, mentre per un'auto D ne occorrono 3 di R1 e 1 di R2.

La loro disponibilità giornaliera è di 24 ore per R1 e di 10 ore per R2.

Supponendo che tutte le auto prodotte siano vendute, le variabili decisionali sono:  $x_1$  (numero di auto B prodotte giornalmente) e  $x_2$  (numero di auto D prodotte giornalmente).

L'indagine di mercato effettuata evidenzia che: (1) la domanda giornaliera di auto B è al più doppia rispetto a quella di D; (2) la domanda giornaliera minima di auto è 4.

Obiettivo: programmare la produzione giornaliera dei due modelli di auto, in modo da massimizzare il guadagno complessivo.

### Modello Matematico

Massimizzare la funzione obiettivo  $z=10x_1+12x_2$ ,

nel rispetto dei vincoli

$$2x_1+3x_2 < 24 \quad (\text{disponibilità in ore di R1})$$

$$2x_1+x_2 < 10 \quad (\text{disponibilità in ore di R2})$$

$$x_1 \leq 2x_2 \quad (\text{n. auto B, non superiore al doppio di D})$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad (\text{vincoli di non-negatività}).$$

Questo problema, essendo caratterizzato da due variabili decisionali, può essere risolto graficamente, come quello relativo allo studente modello.

**(2) Dieta ottimale.** Un palestrato ha deciso di seguire una dieta alimentare caratterizzata dalla presenza delle due sostanze, ANAB e MUSC, note per la loro capacità energetiche se assunte in misura non inferiore ad una certa quantità. Per prepararsi la dieta, il palestrato predispone una tabella sui quantitativi di ANAB e MUSC presenti nei seguenti 6 alimenti:

1 (gatorade), 2 (hamburger), 3 (corn flakes), 4 (latte), 5 (cioccolato), 6 (banane).

Dati disponibili: la quantità di ANAB e MUSC per Kg, il costo unitario dell'alimento e la quantità minima richiesta delle 2 sostanze (Tabella 2).

	1	2	3	4	5	6	quant. minima
ANAB	1	0	2	2	1	2	9
MUSC	0	1	3	1	3	2	19
costo unit. 35	30	60	50	27	22		

Tabella 2: Tabella del palestrato

Il palestrato vuole seguire la dieta ottimale, **spendendo il meno possibile.**

Un suo amico, esperto di RO, costruisce per lui un modello matematico di ottimizzazione che, pur rispettando tutti i vincoli, gli garantisce il raggiungimento del suo obiettivo.

A tal fine, indicata con  $x_j$  la quantità del  $j$ -esimo alimento da acquistare ( $j=1,2,\dots,6$ ), è sufficiente risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

minimizzare  $z = 35 x_1 + 30 x_2 + 60 x_3 + 50 x_4 + 27 x_5 + 22 x_6$ ,

nel dominio di ammissibilità definito dai vincoli

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \quad (\text{quantità minima di ANAB})$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \quad (\text{quantità minima di MUSC})$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 6 \quad (\text{vincoli di non negatività}).$$

**Problema duale.** Un altro suo amico, figlio di un farmacista e esperto di RO, gli propone di seguire una strategia alternativa. A tale scopo gli fa notare che può raggiungere lo stesso scopo, acquistando in farmacia le pillole di ANAB e MUSC.

Il palestrato accetta la proposta a condizione che il costo complessivo delle pillole non risulti superiore al costo totale degli alimenti.

Il figlio del farmacista, allo scopo di farsi accettare la proposta, decide quindi di determinare i prezzi delle pillole mediante un modello che abbia come obiettivo la **massimizzazione del ricavo** del padre, naturalmente nel rispetto del vincolo di competitività rispetto al precedente modello.

A tale scopo, utilizzando la Tab. 2 dei dati, indica con  $a_{ij}$  il numero di unità della sostanza  $i$  contenuta in 1 Kg di alimento  $j$ , essendo  $i=1,2$  e  $j=1,2,\dots,6$  (dato che le sostanze in considerazione sono 2 e gli alimenti 6).

Indica quindi con  $w_1$  il prezzo (da determinare) di una unità di ANAB e con  $w_2$  il prezzo (anch'esso da determinare) di una unità di MUSC.

Di conseguenza:  $a_{1j} w_1$  rappresenta il costo della sostanza 1 (ANAB) contenuto in un Kg di alimento  $j$ ,  $a_{2j} w_2$  il costo della sostanza 2 (MUSC) contenuta in un Kg di alimento  $j$  e  $a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2$  indica il costo di 1 Kg di alimento  $j$  espresso in termini di pillole.

Il figlio del farmacista sa che il palestrato acquisterà le pillole solo se, per  $j=1,\dots,6$ , risulta  $a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 \leq c_j$ .

Se il palestrato deciderà di optare per le pillole, ovviamente acquisterà lo stretto indispensabile. Di conseguenza il ricavo del padre, che lui vuole massimizzare, è dato da  $y = 9 w_1 + 19 w_2$ . Il suo modello matematico è pertanto il seguente:

Massimizzare la funzione obiettivo  $y = 9 w_1 + 19 w_2$ ,

nel rispetto dei vincoli

$$w_1 \leq 35, \quad w_2 \leq 30$$

$$2 w_1 + 3 w_2 \leq 60$$

$$2 w_1 + w_2 \leq 50$$

$$w_1 + 3 w_2 \leq 27$$

$$2 w_1 + 2 w_2 \leq 22$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

La soluzione di questo problema fornirà al figlio del farmacista il “prezzo massimo delle le pillole, accettabile dal palestrato”. Le due soluzioni sono perfettamente competitive, in quanto il rispetto di tutti i vincoli comporta la stessa soluzione.

In RO il problema del palestrato è definito primale, mentre quello alternativo del figlio del farmacista è definito duale. In condizioni di ottimalità (per il primale e per il duale), i due valori di  $z$  sono uguali, il minimo ottenuto dal palestrato coincide cioè con il massimo ottenuto dal figlio del farmacista.

In condizioni di non ottimalità invece il valore  $z$  del palestrato è superiore a quello della funzione obiettivo del figlio del farmacista. E' per questo che il primo, per raggiungere l'ottimalità deve far decrescere la sua funzione obiettivo, mentre il secondo deve farla crescere.

Con l'ausilio del software Lindo, gli insegnanti possono tranquillamente trattare a scuola questo problema, anche in presenza di un numero maggiore di variabili decisionali.

E' interessante notare che, mentre il problema primale (per la presenza di 6 variabili decisionali) non può essere risolto graficamente, quello duale, contenente due sole variabili decisionali, può esserlo. Può pertanto essere interessante risolvere il primo con l'ausilio dell'apposito software, il secondo per via grafica e confrontare i risultati.

**(3) Problema di programmazione aziendale.** Questo esempio costituisce una importante applicazione del problema del "knapsack" in ambito aziendale.

Un dirigente di un'azienda, avendo a disposizione un ventaglio di possibilità, deve decidere quali progetti attivare, in modo da massimizzare il valore complessivo della progettazione. A tal fine, per ogni progetto deve conoscere sia il costo di progettazione sia la sua specifica importanza. L'ipotesi di partenza è naturalmente che il budget disponibile non consenta la realizzazione di tutti i progetti. Vediamo come il problema può essere tradotto in un modello matematico che consenta di trovare la soluzione ottima e di certificarne l'unicità.

Per la sua costruzione, si inizia con l'identificare i dati del problema che sono: il numero complessivo dei progetti ( $n$ ), il costo  $a_j$  del  $j$ -esimo progetto, l'importanza  $c_j$  del  $j$  progetto e il valore  $b$  del budget disponibile.

La  $j$ -esima variabile decisionale  $x_j$  è una variabile booleana, in quanto può assumere unicamente i valori  $(0,1)$ : essa assumerà il valore 0 se il  $j$ -esimo progetto non viene attivato e il valore 1 se esso viene realizzato.

### Modello Matematico

Massimizzare la funzione obiettivo  $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ,

con le variabili decisionali soddisfacenti i vincoli

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j \leq \mathbf{b}$$

$$x_j = \{0,1\}, j = 1, \dots, n.$$

$\mathbf{a}_j$ , ...,  $\mathbf{a}_n$  e  $\mathbf{b}$  sono vettori  $m$ -dimensionali con  $m < n$ .

Esso rappresenta un tipico problema di programmazione lineare con variabili booleane, per il quale esiste una sola soluzione ottimale, risolvibile con metodi ormai standard, anche per valori di  $n$  relativamente grandi.

Lo stesso software Lindo consente di trattare variabili booleane e intere definendo opportunamente le variabili al termine della scrittura del modello. La pagina iniziale del software contiene alcuni esempi svolti che ne facilitano ulteriormente l'utilizzo.

**(4) Problema di assegnazione:** Dovendo eseguire un insieme di  $m$  lavori e disponendo di  $n$  lavoratori, si deve trovare una strategia per l'assegnazione "ottimale" degli  $m$  lavori agli  $n$  lavoratori, nel rispetto delle regole vigenti. Queste prevedono che ogni lavoro sia eseguito "esattamente" da una persona e che ciascuna persona possa fare al "massimo" un lavoro. Poiché ad ogni persona è attribuito un "costo" per ogni lavoro, il problema è quello di effettuare l'assegnazione minimizzando i costi.

I dati disponibili sono:

il numero  $n$  di persone, il numero  $m$  di lavori e

il costo  $c_{ij}$  della persona  $j$  che esegue il lavoro  $i$ .

L'incognita  $ij$ -esima è la variabile decisionale  $x_{ij}$  che assume il valore 1 nel caso alla persona  $j$  venga assegnato il lavoro  $i$  e il valore 0, nel caso non gli sia assegnato al lavoro  $i$ .

### Modello Matematico

Minimizzare la funzione obiettivo  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$   
nel rispetto dei seguenti vincoli

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{il lavoro } i \text{ deve essere eseguito});$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} < 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{il lavoratore } j \text{ potrebbe anche non lavorare});$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

**(5) Problema del trasporto.** Una società deve spedire un certo prodotto dai suoi  $n$  punti di stoccaggio (magazzini) a  $m$  differenti destinazioni. Il problema decisionale consiste nel “minimizzare” il costo complessivo del trasporto, a condizione che siano soddisfatte tutte le richieste, nel rispetto delle disponibilità effettive.

Dati disponibili: il numero  $n$  dei punti di stoccaggio e il numero  $m$  delle destinazioni;

il costo unitario  $c_{ij}$  per il trasporto della merce dal magazzino  $i$  alla destinazione  $j$ ;

la disponibilità  $a_i$  del magazzino  $i$  e la domanda  $b_j$  della destinazione  $j$ .

La  $ij$ -esima incognita è rappresentata dalla quantità  $x_{ij}$  di merce spostata dal magazzino  $i$  alla destinazione  $j$ .

### Modello Matematico

Minimizzare la funzione obiettivo  $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$   
nel rispetto dei vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{soddisfacimento della } j\text{-esima domanda});$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{non superamento della } i\text{-esima disponibilità});$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

**Conclusioni.** La RO rappresenta un settore scientifico interessante e in forte espansione in Italia, come all’Estero. L’ampiezza e la vastità dei settori nei quali viene applicata, come di quelli emergenti ai quali è applicabile, possono rappresentare delle opportunità per gratificanti realizzazioni professionali per non pochi giovani. Condizione necessaria per poterne usufruire è rappresentata dal possesso di una adeguata preparazione matematica di base. In questo campo adeguata vuol dire sufficientemente profonda, in termini di conoscenze di algebra, analisi, geometria e matematica computazionale, da aver determinato una buona attitudine alla interpretazione di situazioni complesse e alla loro traduzione in modelli matematici.

Anche in Sardegna, la RO è stata ed è utilizzata con successo in vari settori, quali: la gestione delle risorse idriche (ENAS, Ente Acque della Sardegna), la logistica dei trasporti (3A-Arborea, CTM), la gestione del trasporto marittimo (GRENDI trasporti marittimi), ecc..

Attualmente essa viene applicata in un ambizioso progetto (CagliariPort 2020) che riguarda la gestione smart dell'impatto che il notevole incremento del traffico portuale comporta su Cagliari e il suo Hinterland. La complessità del problema, cui deve corrispondere una gestione ottimizzata, deriva dal notevole incremento del traffico passeggeri e merci nel porto di Cagliari, verificatosi negli ultimi anni e previsto in aumento per i prossimi anni.

Come si vede dalla Figura 5, gli attori che intervengono per la determinazione di un tale tipo di soluzione sono molteplici. Essa evidenzia sia le molteplici interconnessioni esistenti evidenziano, sia il ruolo centrale della RO relativamente all'ottimizzazione della Logistica (Obiettivo Realizzativo 7).

Per maggiori dettagli si può consultare il sito <http://cp2020.crs4.it>.

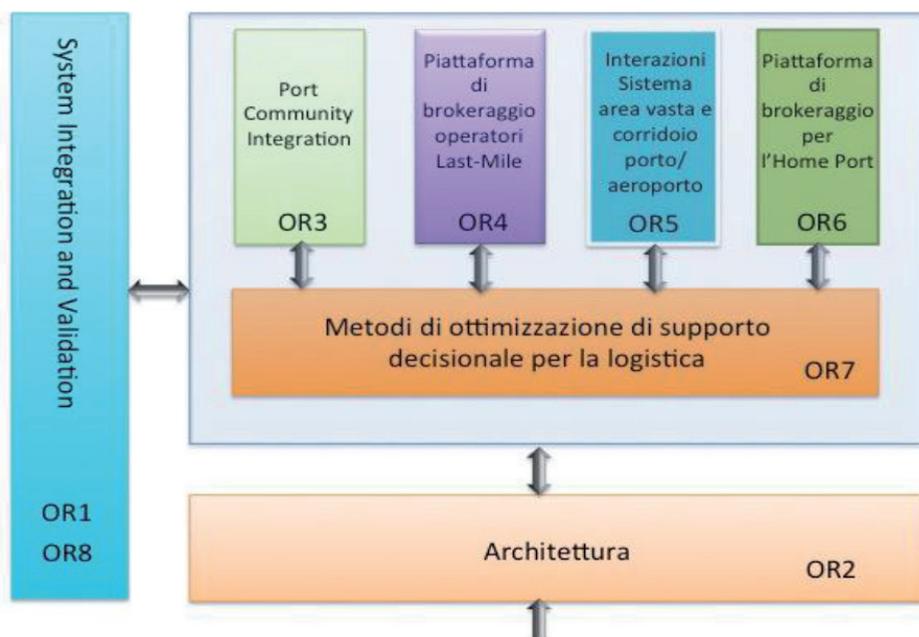


Figura 5. CagliariPort2020

### Considerazioni finali

In questo paragrafo riportiamo schematicamente alcune considerazioni e informazioni che sottolineano la possibilità di attuare una didattica di tipo laboratoriale che, valorizzando i laboratori didattici e le aule informatizzate già presenti, ne motivano l'eventuale potenziamento.

L'attività laboratoriale, anche con l'utilizzo del software segnalato, consente di:

- Utilizzare facilmente algoritmi di ottimizzazione;
- Far lavorare gli alunni sulla soluzione di problemi complessi, non risolvibili con carta e penna;
- Abituare gli studenti a considerare il computer come fondamentale strumento di sperimentazione nel campo del problem solving;
- Riconoscere la Matematica come disciplina insostituibile nella rappresentazione di innumerevoli situazioni problematiche e come formidabile strumento di supporto alle decisioni.

In sintesi, come riportato da uno dei maggiori studiosi italiani di RO, “Modellare la realtà richiede necessariamente capacità di vedere la realtà in modi nuovi, di cambiare prospettiva, di uscire da vecchi paradigmi per accoglierne o inventarne nuovi”<sup>2</sup>

La RO evidenzia, in particolare, che il ruolo della Matematica nell'era dei computers, è soprattutto modellistico: la Matematica non serve a fare calcoli, bensì a non fare calcoli. Infatti la RO serve a costruire modelli e algoritmi che consentano ai computers di eseguire per noi i calcoli.

Citando Edsger W. Dijkstra, uno dei padri storici della RO: “Computer Science is no more about computers than astronomy is about telescopes”.

---

<sup>2</sup> (\*) G. Gallo, Costruzione della Pace: quale ruolo per la matematica?, rielaborazione di una conferenza tenuta il 30 novembre 2009 presso l'Università di Camerino, Pisa, 15 aprile 2010.

**BIBLIOGRAFIA**

1. A. Schettino, "La Ricerca Operativa: una strategia multifunzione per la scuola superiore" in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" vol 35, sez. B, Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin", Paderno del Grappa (TV), 2012, p. 171-19
2. Before It's Too Late: A Report to the Nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st century", U.S. Department of Education, 2008 (USA).
3. G. Felici, "Ricerca Operativa: la matematica al lavoro", sito Treccani-scuola, 2006. [https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/Treccani\\_ROscuola\\_felici.pdf](https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/Treccani_ROscuola_felici.pdf)
4. G. Righini, "La R.O. nelle scuole superiori", AIRO News 11, 1, 2006. <https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/AIRONews%20didattica.pdf>
5. G. Righini, "L'insegnamento della R.O. nelle scuole superiori", sito Treccani-scuola, 2006. [https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/Treccani\\_ROscuola\\_righini.pdf](https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/Treccani_ROscuola_righini.pdf)
6. High School Operations Research (USA). (Wayne State University, Michigan,)
7. M. Daskin, How We Can Avert A National Crisis, *OR/MS Today*, Aprile 2006
8. K. Chelst, T. Edwards, R. Young, K. Keene, D. Royster, Can You Imagine ...500,000 Prep Proponents of O.R.?, *OR/MS Today*, Agosto 2008.
9. R. Sagripanti, "La divulgazione della R.O. nelle scuole superiori di secondo grado", tesi di laurea, Università di Camerino, 2012. <https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/TesiSagripanti.pdf>
10. V. Mehrotra, Most Important Thing Our Profession Can Do, *OR/MS Today*, Febbraio 2006
11. Siti web di interesse
12. <http://www.airo.org>
13. <https://homes.di.unimi.it/righini/Scuola/index.html>
14. <https://www.informs.org/>
15. <http://sorsa.sc.unica.it>
16. <http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeus/>
17. <http://www.learnaboutor.co.uk/>

## NOTIZIE

## ATTIVITÀ SVOLTE DAL CRSEM

Come sezione di Cagliari dell'ARMT ( <http://www.armtint.org/> ), il CRSEM ha gestito e organizzato il **24° Rally Matematico Transalpino**, rivolto alle classi 3<sup>^</sup>, 4<sup>^</sup>, 5<sup>^</sup> della scuola primaria, alla scuola secondaria di primo grado e al biennio della scuola secondaria di secondo grado. Realizzato nell'ambito delle attività di formazione del CRSEM, ha visto la partecipazione di circa 100 insegnanti, 150 classi per un totale di 2637 alunni nella sede di Cagliari.

**Campionati internazionali di Giochi Matematici.** La selezione locale si è svolta a Cagliari il 12 Marzo 2016 la 19<sup>°</sup> edizione della Semifinale di Zona. Hanno partecipato alla gara 3286 concorrenti provenienti da diverse scuole della provincia di Cagliari e da altre province della Sardegna: 2011 della categoria *C1* (prima e seconda media); 971 della categoria *C2* (terza media e prima superiore); 255 della categoria *L1* (seconda, terza e quarta superiore); 43 della Categoria *L2* (quinta superiore e biennio universitario); 6 della categoria *GP* (“grande pubblico”: ultimi anni dell’Università e concorrenti “adulti. I vincitori della Semifinale della sede di Cagliari ammessi alla Finale nazionale di Milano sono complessivamente 242: 3 della Categoria GP; 4 della Categoria L2; 26 della Categoria L1; 68 della Categoria C2 e 141 della Categoria C1. La premiazione dei vincitori della selezione locale ammessi alla finale di Milano, si è tenuta il 15 Aprile alle ore 16:30 nell’ Aula Magna “A. Boscolo” della Cittadella Universitaria di Monserrato.

## ATTIVITÀ PER L'ANNO SCOLASTICO 2016/2017

**Formazione.** Il CRSEM organizza nei giorni 7, 12, 15 e 23 Settembre 2016, dalle ore 16.30 alle 19.30, nell’Aula Magna del Dipartimento di Matematica e Informatica, un corso sul tema: *Le rappresentazioni nell’apprendimento e nell’insegnamento della matematica: propulsione o freno?* Il corso è rivolto ad insegnanti di scuola dell’Infanzia, Primaria e Secondaria di primo grado. La conferenza/laboratorio del 23 sarà tenuta dalla Prof.ssa Cristina Sabena dell’Università di Torino sul tema: *Segni, corpo e artefatti: risorse per l’apprendimento e l’insegnamento focalizzerà alcuni aspetti dell’apprendimento della matematica in ottica multimodale.*

**Formazione rivolta ai Soci.** Il CRSEM organizza da Febbraio a Marzo 2017 presso il Dipartimento di Matematica e Informatica, un corso sul tema: *Attività di problemsolving e curricolo di matematica*, rivolto ad insegnanti della scuola primaria, secondaria di I grado e biennio della secondaria di secondo grado.

**Formazione su richiesta delle Istituzioni scolastiche** (nella sede di Scuole anche in rete). I.C. **Perfugas-(SS)** (Scuola Capofila). Scuola secondaria di I grado “Alfieri”Cagliari (Scuola Capofila). I.C. **Elmas (CA)**. I.C. **Ozieri (SS)** .

**Ciclo di seminari, conferenze e laboratori** nell’ambito del Programma di Matematica del Progetto dell’Accademia dei Lincei, dal 20 Novembre 2016 al 2 Marzo 2017.

Per informazioni scrivere a [crsem.segreteria@gmail.com](mailto:crsem.segreteria@gmail.com); telefonare al 0706758528, preferibilmente il mercoledì mattina dalle 10.00 alle 14.00 o consultare il sito del CRSEM: <http://cli.sc.unica.it/crsem/>

### **APPUNTI<sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup> Lo spazio è dedicato ad appunti di riflessione sulla lettura o sulle esperienze realizzate, che vi invitiamo ad inviarci via e-mail [crsem.segreteria@gmail.com](mailto:crsem.segreteria@gmail.com)