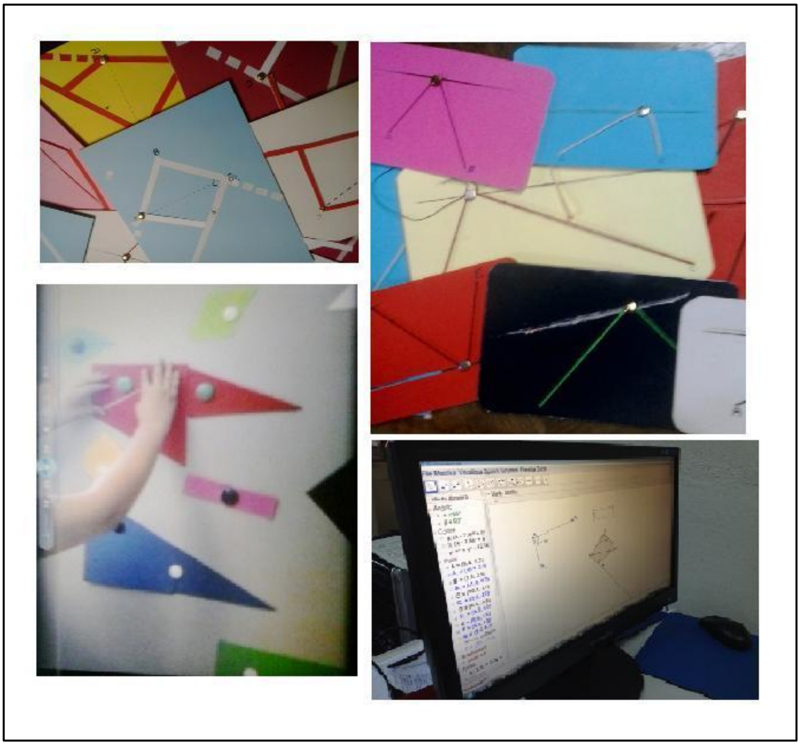
Malloci P. - Polo M. - Sanna D.

MATEMATICA IN LABORATORIO

Problemi, costruzioni, strumenti e software
per attività laboratoriali in classe



CRSEM

Hanno collaborato:
Pietrina Malloci
Anna Maria Montis
Annelise Murgia
Maria Polo
Silvana Saba
Daniela Sanna

Collana Formazione

Vol. 2 – MATEMATICA IN LABORATORIO

Prima edizione
Supplemento al n. 1 – 2014 della rivista
L'educazione Matematica

ISSN : 1120-4850

Indirizzo CRSEM: c/o Dipartimento di Matematica e Informatica, via Ospedale 72, 09124 Cagliari.

Indirizzo e-mail: crsem.segreteria@gmail.com
Sito: http://cli.sc.unica.it/crsem

Sommario

Introduzione

Il C.R.S.E.M. lavora dal 1980 con insegnanti ed alunni di Scuola dell'Infanzia, Primaria e Secondaria al fine di favorire, introdurre e sostenere metodologie e pratiche innovative, per i diversi livelli scolastici. Tali innovazioni, che considerano con attenzione e recepiscono dei risultati raggiunti nei diversi ambiti di ricerca, vengono inserite nella normale attività curricolare, sperimentate dagli insegnanti di classe o direttamente dagli insegnanti del Centro. Negli incontri con gli insegnanti trovano posto momenti di formazione, di laboratorio, di proposta e analisi di percorsi didattici da sperimentare e di riflessione sui risultati delle sperimentazioni.

Questo testo raccoglie una sintesi delle riflessioni a livello teorico, operativo e didattico delle attività proposte nel corso di formazione *"Geometria in movimento: alla scoperta di invarianti. Aspetti teorici e didattici della geometria delle trasformazioni, con l'utilizzo di materiale manipolabile e GeoGebra",* rivolto a insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria, tenuto dal CRSEM nell'a.s. 2013/14 a Cagliari. Il primo volume della collana Formazione dal titolo "Geometria in movimento", già pubblicato sul tema delle trasformazioni, ha proposto costruzioni che tecnicamente necessitano la padronanza di comandi via via più complessi del software e richiedono conoscenze matematiche che si considerano già acquisite. In questa ottica, ciascuna esercitazione è introdotta da un elenco, sintetico ed essenziale (ovviamente non esaustivo) di *prerequisiti informatici*, *contenuti matematici*, *nuovi comandi.*

Questa seconda pubblicazione, come preannunciato, offre indicazioni per organizzare la classe e suggerimenti tecnici per produrre, sfruttando le potenzialità del software e di altri strumenti, la verifica di congetture, la ricerca sulla stabilità di proprietà, l'intuizione di generalizzazioni partendo da casi determinati. Analizzando problemi geometrici inquadrabili nei curricula della scuola secondaria, ma anche primaria, da risolvere mediante supporti manipolabili come modelli tangibili (costruiti con stecchette, elastici, tagli su cartoncino) e modelli virtuali (costruiti con un software come GeoGebra), si presentano sinteticamente le modalità di lavoro e il ruolo assunto sia dall'insegnante nella gestione della classe che dagli alunni nella conquista del sapere matematico.

Le attività laboratoriali che vengono proposte in questo secondo volume, riprendono esperienze di laboratori svolti in classe o con gli insegnanti nell'ambito delle attività del CRSEM. Le attività di laboratorio, realizzate a partire dai primi anni del 2000 con l'utilizzo del software CABRI, hanno confermato la possibilità, la pertinenza e l'efficacia dell'utilizzazione di modelli manipolabili insieme a software di geometria dinamica (Polo M., Malloci P., Montis A. M., 2006) per l'apprendimento della matematica fin dalla scuola primaria (Polo M., 2005) e quindi non solo per gli aspetti di natura più strettamente geometrica.

Il *laboratorio,* a cui si riferiscono le nostre esperienze, si allinea con quanto già presentato nella proposta dei programmi UMI-CIIM nel 2001 in cui si leggeva che il laboratorio *non costituisce né un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate sull'uso di strumenti, tecnologici e non, e finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non vuole essere un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, idee.*

I percorsi di insegnamento/apprendimento sperimentati mantengono ancora oggi carattere innovativo sia rispetto al ruolo assegnato ai contenuti di geometria che rispetto all'obiettivo di mettere in opera attività che favoriscano il dibattito e l'argomentazione degli alunni, anche con l'apporto dell'ambiente informatico (nel caso specifico l'utilizzazione di Cabri e negli ultimi anni di GeoGebra). L'innovazione riguarda, in modo particolare, la realizzazione di una necessaria modifica della metodologia dell'insegnante che, mantenendo il termine utilizzato con gli insegnanti sperimentatori, abbiamo denominato *metodologia del "laboratorio di matematica".* Per *metodologia del laboratorio di matematica* intendiamo la condizione di funzionamento della *pratica didattica,* in un *clima di laboratorio,* nel quale l'insegnante è mediatore dei processi di apprendimento con interventi neutri rispetto al sapere in fase di costruzione. Per chiarire tale approccio, che riguarda più in generale un punto di vista specifico sulle ricadute che i risultati delle ricerche in didattica della matematica o in ambito pedagogico, illustriamo brevemente gli aspetti che hanno costituito le fondamenta delle nostre sperimentazioni e delle scelte di natura teorico/didattica che hanno guidato la progettazione, la sperimentazione e la riflessione sulle esperienze realizzate.

1.1 Apprendimento della Matematica a scuola e Clima di laboratorio

Gli studi dell'ambito psicologico e della Didattica della Matematica hanno identificato un doppio paradosso caratterizzante il processo di insegnamento/apprendimento in situazione scolastica: per apprendere l'alunno deve accettare di rompere la relazione didattica ed entrare in relazione diretta con il sapere (paradosso dell'*atto* di apprendimento); se l'insegnante dice ciò che vuole ottenere, non può più ottenerlo (paradosso dell'*atto* di insegnamento). Nella Teoria delle Situazioni, elaborata nell'ambito di ricerca in Didattica della Matematica da G. Brousseau 1998, il superamento del paradosso è realizzato se si instaura una situazione *a-didattica* che realizza una condizione particolare della relazione didattica, specifica del sapere, che lega insegnante e alunno.
Una situazione è *a-didattica* relativamente ad un sapere *s*, se contiene le condizioni *per poter essere vissuta dall'alunno indipendentemente dalle istanze didattiche.* Le *azioni* che l'alunno compie, le *risposte* e le *argomentazioni* che fornisce devono quindi essere *funzione del suo rapporto* (non totalmente esplicito) con il sapere *s* in quanto conoscenza da acquisire[1]. Si tratta quindi di un "contesto" (ambiente di apprendimento) nel quale il sapere

[1] La Teoria delle situazioni, distingue la situazione a-didattica da altri due tipi di situazioni caratterizzate da una natura differente della relazione didattica Insegnante-Alunno-Sapere.

da apprendere/da insegnare sia necessario alla determinazione della soluzione di un problema.
Dal punto di vista teorico della Teoria delle situazioni, perché l'apprendimento sia significativo[2], "costruire un contesto" nel quale il sapere "funziona" come soluzione ad un problema comporta due *azioni* distinte teoricamente ma in stretta interconnessione: identificare le variabili didattiche che mettono in gioco le strategie legate al sapere da insegnare e innescare il processo di devoluzione. Il doppio paradosso si supera, quindi, con la realizzazione del processo di devoluzione, attraverso il quale l'insegnante fa accettare (implicitamente) all'alunno la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema e accetta egli stesso le conseguenze di questo transfert (errori ripetuti, saperi momentaneamente parzialmente corretti).
Le attese reciproche di insegnante e alunno rispetto al sapere "regolano" il funzionamento del processo di devoluzione; il modello teorico dell'insieme di tali attese prende il nome di *Contratto Didattico relativo ad un sapere S*[3]. Nel processo di insegnamento/apprendimento l'insieme dei comportamenti e delle attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno nei confronti del sapere deve necessariamente contenere degli elementi *impliciti* se tale sapere è in fase di costruzione, l'apprendimento di S necessita di continue rotture del contratto didattico.
Ma il processo di insegnamento/apprendimento di S in situazione scolastica non si esaurisce con la *Costruzione di una Conoscenza,* ma si evolve in un processo (inverso a quello della devoluzione) attraverso il quale la nuova conoscenza acquisita diventa riferimento culturale "ufficializzato" nel quadro collettivo della classe e collocato in una disciplina specifica (Matematica). Tale processo viene denominato, nell'ambito della Teoria delle situazioni, *Istituzionalizzazione* di un sapere.
L'insegnante e l'alunno, hanno infine una ulteriore attesa reciproca che li vincola anche alle loro rispettive funzioni istituzionali: quello della Valutazione. Anche la valutazione può essere descritta come un *processo di Valutazione*. Tale complesso processo è stato ampiamente studiato nell'ambito della Pedagogia e della Didattica Generale e non è nostro intento qui fornire alcuna sintesi degli importanti risultati di tali studi teorici e delle loro applicazioni in ambito scolastico.
I processi di *devoluzione* e di *istituzionalizzazione*, che non devono essere confusi con le fasi della programmazione didattica, contengono necessariamente delle fasi di *monitoraggio* del processo di insegnamento/apprendimento di un sapere in fase di costruzione che l'insegnante e l'alunno realizzano, spesso implicitamente. Il processo di *valutazione* è invece caratterizzato da una funzione specifica istituzionalmente assegnate al sistema Insegnante-Alunno-Sapere. Il sapere è supposto acquisito, l'insegnante deve esplicitamente esprimere un giudizio su tale acquisizione e l'alunno deve esplicitamente mostrare di aver acquisito il

---

- **Situazione non-didattica**: una situazione è *non-didattica*, relativamente ad un sapere *S* se tale situazione *non è esplicitamente organizzata* per permettere l'apprendimento di *S.*
- **Situazione didattica**: una situazione è *didattica*, relativamente ad un sapere S se in tale situazione è introdotta un *relazione didattica* che attribuisce agli elementi *I* ed *A* le posizioni rispettive di Insegnante e Alunno *nei confronti di S.*

[2] L'accezione apprendimento significativo è utilizzata nel senso dato in Pellerey 1994.

[3] Con il termine "Contratto didattico", si identifica: L'insieme delle relazioni che determinano - quasi sempre in modo implicito - rispetto ad un sapere insegnato, ciò che ciascun elemento - insegnante , alunno - ha la responsabilità di gestire e di cui sarà responsabile rispetto all'altro. Nella pratica, più contratti didattici "agiscono" contemporaneamente in relazione a statuti diversi dei contenuti matematici in gioco in una assegnata situazione.

sapere in gioco. Il fenomeno del contratto didattico regola anche nelle fasi del processo di valutazione le attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno rispetto al sapere. Ciò può determinare nell'insegnante alcune distorsioni nella valutazione dell'apprendimento[4]. Ma anche l'alunno può fornire risposte, sia corrette che errate, dettate da un fraintendimento di ciò che egli ritiene (implicitamente) che ci si aspetti da lui.

Così, l'alunno si pone talvolta (anche inconsapevolmente) in una *posizione* che non è quella dell'alunno, e ciò può *impedire* (implicitamente) all'insegnante di prendere in considerazione come significativa (rispetto al sapere o al ragionamento fatto) la risposta dell'alunno. Per esempio, ciò accade quando l'alunno utilizza un algoritmo diverso da quello "atteso" dall'insegnante nella risoluzione di un problema o nel fornire la risposta ad un esercizio.
Sulla previsione di come gestire le risposte corrette o errate degli alunni si basa fondamentalmente la possibilità di costruire un *clima di laboratorio* in classe.

1.2 Clima di laboratorio e pratica didattica

Nella pratica didattica una delle preoccupazioni degli insegnanti è quella di impedire che gli alunni commettano errori. Con una espressione forte, Chevallard afferma che "il potere dell'insegnante in classe consiste più nel suscitare la risposta corretta (che implicitamente classifica le altre come scorrette) che nel designare le risposte scorrette." (Chevallard, 1985)
Alcune delle risposte possibili possono essere eliminate o avere poche possibilità di apparire, non perché non siano pertinenti dal punto di vista matematico ma perché ritenute "fuori luogo", nella interpretazione della situazione da parte dell'alunno, rispetto alle attese "implicite" dell'insegnante.

Diventa, quindi, importante spostare l'attenzione dal ruolo attribuito specificatamente all'errore alla necessità per l'insegnante di **prevedere, individuare la natura e gestire le risposte degli alunni**, siano esse: attese o non attese, ritenute giuste o sbagliate, o ancora giuste o sbagliate. Per questo motivo esaminiamo come ogni risposta relativa ad un sapere che l'alunno fornisce **può essere collegata a due *condizioni delle attività in classe* di natura differente**, rispettivamente caratterizzate da un sapere che è *acquisito* o da un sapere che è *in fase di costruzione*.

Secondo la teoria costruttivista, se il sapere è **in fase di costruzione**, la *destabilizzazione di uno dei "sensi del sapere"* è una fase necessaria e costitutiva del processo di costruzione delle conoscenze. L'errore, la difficoltà o la risposta non attesa sono in questo caso l'indice dell'instaurarsi di una fase necessaria del processo di costruzione della conoscenza (cioè del *senso del sapere*). L'alunno che dà la risposta "errata" (o non attesa dal punto di vista dell'insegnante) può essere in una fase di disequilibrio e un processo di assimilazione/accomodamento, rispetto ad una nuova conoscenza, può innescarsi.

Davanti a risposte di questo tipo l'insegnante può prendere due decisioni differenti. Durante l'attività in classe tali decisioni sono istantanee e spesso inconsce: **rilevare l'errore**

[4] Per alcuni esempi su contenuti matematici si veda Polo (2000).

ed esplicitarlo all'alunno, oppure, **rilevare l'errore e tenerlo per sé**. Nel primo caso, la decisione interrompe nell'alunno la situazione di conflitto e rinvia la costruzione della nuova conoscenza. Con la seconda decisione, l'insegnante, non esprime giudizi sull'errore (percepibili dall'alunno) ma accetta che l'alunno sbagli e incoraggia la ricerca di altre risposte, ristrutturando le condizioni della situazione che permettano tale ricerca. Ciò può favorire l'innescarsi di un processo di *devoluzione all'alunno di una responsabilità nei confronti del sapere,* e permettere la costruzione della nuova conoscenza.

Se il **sapere è acquisito,** l'alunno può non dare alcuna risposta o dare una risposta non attesa o considerata errata dall'insegnante perché le *condizioni della situazione* lo hanno influenzato (in modo implicito) conducendolo a fornire una risposta non sulla base del suo rapporto con il sapere in gioco (cioè con le sue conoscenze) ma sulla base della sua interpretazione della attività e delle domande a cui deve rispondere. La difficoltà di destrutturare nella *posizione insegnante* la tendenza ad "ottenere immediatamente la risposta corretta" è stata confermata dai risultati delle nostre sperimentazioni e dall'osservazione delle attività in classe, che ci hanno consentito anche di verificare la pertinenza della *metodologia del laboratorio* al fine di superare tale difficoltà favorendo l'accettazione da parte dell'insegnante degli eventuali dubbi, errori, tentativi di risposte parziali e parzialmente corrette degli alunni.
Un clima di laboratorio risulta anche indispensabile nello sviluppo delle capacità legate al porre e risolvere problemi, al fornire congetture, argomentazioni, prove e dimostrazioni.

Dal punto di vista dell'inserimento di attività innovative nella programmazione annuale del singolo insegnante si è realizzata una buona mediazione, anche se a detta di qualche insegnante il "poco tempo" ha reso non sempre possibile un inserimento senza l'impressione di un aggravio di lavoro. Questo atteggiamento non è attribuibile esclusivamente al tipo di attività ma pervade la pratica degli insegnanti in tutte le attività sperimentali e di innovazione. Il cambiamento richiede tempo e adattabilità prima di diventare patrimonio e competenza naturalizzata delle pratiche scolastiche e necessita anche aspetti organizzativi e di gestione di sistema della scuola che spesso non sono considerati come rilevanti ed invece possono far arenare o impedire l'innovazione.

1.3 Innovazione, attività laboratoriale, software e modelli articolabili

L'innovazione delle pratiche scolastiche rispetto alle modifiche introdotte dall'utilizzo di ambienti multimediali è oramai imposta alla scuola dall'introduzione delle LIM. La complessità dell'ambiente di apprendimento che questo strumento concorre a determinare è innegabile. La problematica dell'individuazione delle *variabili fondamentali* che debbano essere prese in considerazione per sfruttare le potenzialità dello strumento, sia rispetto al lavoro dell'insegnante che a quello dell'alunno, è ancora aperta. Il ruolo dei software di geometria dinamica risulta ancora più rilevante se si considera la loro potenziale utilizzazione anche come strumento di costruzione di materiale didattico da parte degli insegnanti. Un software di geometria dinamica, che consente di muovere e deformare le figure, può essere utilizzato per favorire una risposta consapevole e per "provare" o argomentare risposte a domande riguardanti i movimenti e le trasformazioni. Ad esempio il software GeoGebra consente di costruire strumenti e creare comandi che *con un paio di* *click* permettono di "disegnare e muovere" forme, figure e oggetti geometrici per i quali non esiste un comando elementare, come ad esempio il rettangolo. Il comando "Muovi" applicato ad oggetti diversi permette infatti di mettere in opera la modalità di *trascinamento*[5] caratteristica fondamentale di tutti gli ambienti di geometria dinamica. Tale modalità produce una successione di immagini, percepite come un'immagine in movimento, che corrisponde ad una deformazione continua della figura di partenza. Tale deformazione lascia invariate solo le caratteristiche della figura che corrispondono a proprietà geometriche introdotte come comandi o strumenti di GeoGebra. Tutte le costruzioni realizzate con questo software si muovono o si modificano diversamente a seconda dei punti o degli oggetti che si decide di muovere trascinando.

1.4 In questo volume

Questo secondo volume è composto da 7 paragrafi che presentano altrettanti laboratori articolati per livello scolastico: 3 per la scuola primaria e 4 per la scuola secondaria. Per ciascun laboratorio sono indicati: il titolo dell'attività, il livello scolare orientativo, gli obiettivi e i contenuti. Ciò con l'intento di consentire una utilizzazione adattabile alle diverse classi della scuola primaria e secondaria. Ciascun insegnante, sulla base della propria programmazione e in funzione dei prerequisiti posseduti dai suoi alunni, in ambito matematico e tecnico sul software, potrà utilizzare anche le attività proposte per i livelli precedenti (come fase di approccio) o successivi (come fase di sviluppo). Ad esempio, l'attività proposta per la scuola primaria (pag. 11) dal titolo "**Prendo due triangoli, ottengo un quadrilatero"** può essere utilizzata anche per la scuola secondaria; quella analoga con i triangoli scaleni (pag. 18), suggerita come attività per la secondaria, può essere proposta dopo quella con i triangoli rettangoli isosceli, anche nella scuola primaria. Nei laboratori la fase di lavoro con l'utilizzo del software segue quella con i modelli manipolabili; anche tale sequenzializzazione non è prescrittiva e potrà essere modificata dall'insegnante in funzione delle risposte della classe e delle esigenze organizzative. In ciascuna delle fasi di lavoro che precedono la conclusione, l'insegnante gestirà la discussione stimolando gli allievi con domande opportune, lasciando che procedano gradualmente nella costruzione del sapere in gioco. Le fasi dei laboratori con GeoGebra sono percorribili, considerando la disponibilità dei mezzi informatici: **dal solo insegnante** come supporto per ottenere i modelli dinamici da mostrare alla classe nella fase di conclusione e istituzionalizzazione delle soluzioni ai problemi proposti; **dagli alunni** come consolidamento dell'utilizzo del software, come guida per la costruzione geometrica delle figure o per validare le soluzioni e le conclusioni tratte nelle fasi precedenti.

Non vengono riportati in questo volume gli elaborati e i risultati delle sperimentazioni, alcune delle quali ancora in fase di realizzazione, e invitiamo gli utilizzatori a segnalarci eventuali possibili refusi, ad inviarci suggerimenti di modifiche e commenti e riflessioni su eventuali proposte delle attività nelle classi o nella formazione degli insegnanti.

A cura di Maria Polo - Direttore del CRSEM

[5] La pratica del "trascinamento" è analizzata, in relazione al software di geometria dinamica CABRI, in Arzarello F. *et al.* (2002) e Mariotti M. A. (2004) a cui si rimanda per maggiori dettagli.